Anwendung der Raketengleichung:

Saturn-V-Rakete
v_r = 4000 m/s
t = 100 s pro Stufe

$$v(t) = v_0 + v_r \cdot \ln \frac{m_0}{m(t)} - g \cdot t$$

Erste Stufe: Startmasse $3 \cdot 10^6$ kg; Endmasse $1 \cdot 10^6$ kg

Zweite Stufe: Startmasse $9 \cdot 10^5$ kg; Endmasse $2 \cdot 10^5$ kg

Dritte Stufe: Startmasse $1{,}8 \cdot 10^5$ kg; Endmasse $2{,}5 \cdot 10^4$ kg

$$v(100\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m/s} + 4000\,\mathrm{m/s} \cdot \ln \frac{3}{1} - 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 100\,\mathrm{s} = 3413\,\mathrm{m/s}$$

$$v(200\,\mathrm{s}) = 3413\,\mathrm{m/s} + 4000\,\mathrm{m/s} \cdot \ln \frac{9}{2} - 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 100\,\mathrm{s} = 8448\,\mathrm{m/s}$$

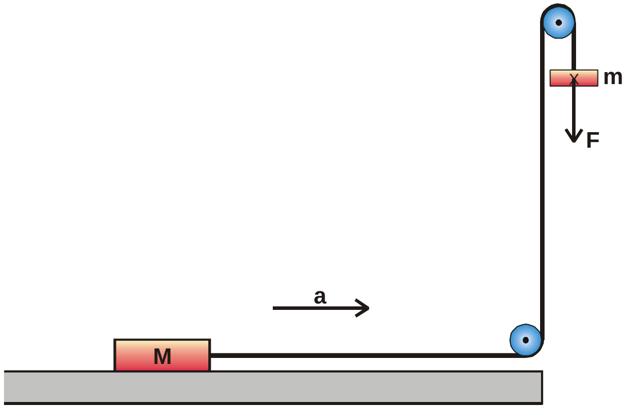
$$v(300\,\mathrm{s}) = 8448\,\mathrm{m/s} + 4000\,\mathrm{m/s} \cdot \ln \frac{18}{2{,}5} - 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 100\,\mathrm{s} = 15363\,\mathrm{m/s} \approx 15\,\mathrm{km/s}$$

Insgesamt verbrauchter Treibstoff: $28{,}55 \cdot 10^5$ kg, abgeworfene Masse $1{,}45 \cdot 10^5$ kg

Zum Vergleich (einstufig): Startmasse $3 \cdot 10^6$ kg; Endmasse $1{,}45 \cdot 10^5$ kg nach 300 s

$$v(300\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m/s} + 4000\,\mathrm{m/s} \cdot \ln \frac{30}{1{,}45} - 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 300\,\mathrm{s} = 9175\,\mathrm{m/s} < v_2$$

Das wäre weniger als v_2 = 11,2 km/s, die "zweite kosmische Geschwindigkeit", die benötigt wird, um ohne weiteren Antrieb das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen.

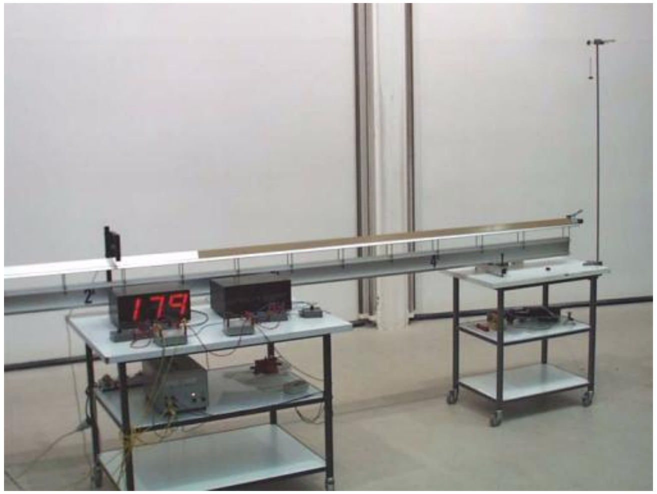


Experiment: Attwood-Fallmaschine

Die Gewichtskraft der Masse m beschleunigt die Masse $M + m$

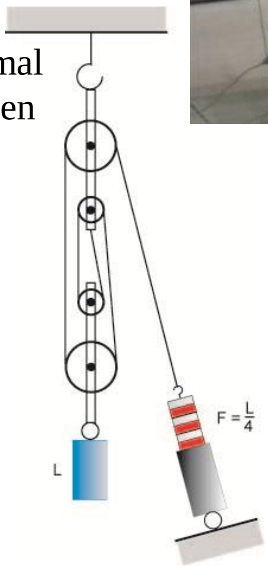
$$F = m \cdot g = (M+m) \cdot a \qquad \rightarrow \qquad a = g\,\frac{m}{M+m}$$

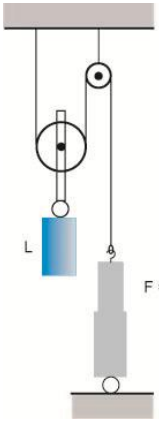
Die Fallbewegung ist somit viel langsamer als beim freien Fall. Die Beschleunigung ist die gleiche, wenn sowohl die Masse m als auch die Masse M verdoppelt werden.

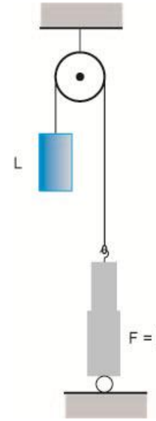


Experiment: Flaschenzug

Diese einfachen Maschinen wurden vor > 2000 Jahren erfunden. Feste Rollen erleichtern die Arbeit (z.B. Kran), aber n lose Rollen reduzieren die erforderliche Kraft um einen Faktor $2n$, wobei die Reibung vernachlässigt sei. Man verwendet zur Beschreibung das "Prinzip der virtuellen Verrückung", d.h. infinitesimal kleine gedachte Verschiebungen im Einklang mit den Zwangsbedingungen. Trägheitskräfte werden also vernachlässigt. Betrachte "Arbeit" = Kraft·Weg







Gewicht des Körpers Weg: $W_1 = F_1 \cdot ds$

Zugkraft·Weg: $W_2 = F_2 \cdot 2n \cdot ds$

Die Gesamtarbeit ist im Gleichgewicht 0:

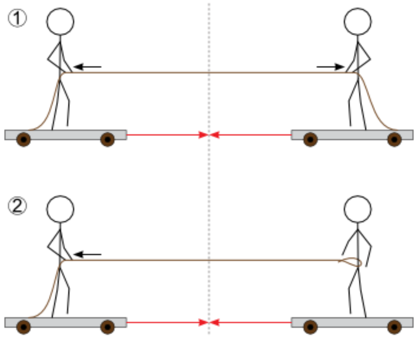
$$F_1 \cdot ds - F_2 \cdot 2n \cdot ds = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_2 = \frac{F_1}{2n}$$

Experiment: Actio = Reactio

Eine Kraft bewirkt eine gleich große Gegenkraft, bzw. Summe der Kräfte in einem abgeschlossenen System ist null:
$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_i \vec{p}_i = \text{const.}$$

Dies entspricht dem Impulserhaltungssatz.

Bei dem Versuch stehen zwei Studierende auf zwei Rollwagen und ziehen an einem Tau. Die Endposition hängt nicht davon ab, welcher von beiden zieht.



Experiment: Elastische Stöße

Ein nach rechts bewegter Schlitten A stößt mit Geschwindigkeit v_0 auf einen ruhenden Schlitten B.

$M_A = M_B$: A bleibt stehen, B bewegt sich mit v_0 nach rechts

$M_A > M_B$: Beide Schlitten bewegen sich mit $v < v_0$ nach rechts, A langsamer als B

$M_A < M_B$: Beide Schlitten bewegen sich mit $v < v_0$, und zwar B nach rechts, nach links.

2.1.6 Energie und Energieerhaltungssatz

Der Impuls ändert sich ohne den Einfluss äußerer Kräfte nicht, er ist eine **Erhaltungsgröße**.
Aus der Kombination von Masse und Geschwindigkeit ergibt sich eine weitere wichtige Größe:

2. Newtonsches Axiom $F = m \cdot a = m \cdot \dot{v}$

mit v multipliziert ergibt $F \cdot v = \frac{d}{dt}(F \cdot x) = m \cdot \dot{v} \cdot v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \cdot v^2\right)$ $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ **kinetische Energie**

Das Produkt aus Kraft F und Weg x heißt **Arbeit**. Alle Formen von Energie können in Arbeit umgewandelt werden. Energie wird manchmal als "gespeicherte Arbeit" bezeichnet. Energieformen sind z.B. kinetische Energie, potenzielle Energie (Körper entgegen der Gravitation gehoben, Feder zusammengedrückt), Wärme, elektrische Energie, chemische Energie oder Kernenergie.
Für die Summe aller Energieformen in einem abgeschlossenen System gilt der Energieerhaltungssatz:
Die Energie in einem abgeschlossenen System ist eine Erhaltungsgröße, aber Energieformen können sich ineinander umwandeln. Beispiel: senkrechter Wurf nach oben, kinetische Energie nimmt ab, potenzielle Energie nimmt zu, ihre Summe bleibt konstant.

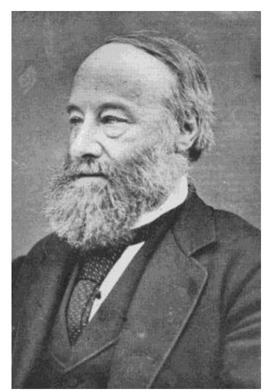
Arbeit (*work*) $W = \vec{F} \cdot \vec{x}$

Leistung (*power*) $P = \frac{W}{t}$ Arbeit pro Zeit

$$[W] = [E] = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} = 1\,\mathrm{J} \quad \text{(Joule)}$$

$$[P] = 1\,\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W} \quad \text{(Watt)}$$

Bei der "Stromrechnung" bezahlt man nicht den elektrischen Strom, sondern Energie, nämlich die in Anspruch genommene elektrische Leistung (in Watt oder kW) mal der Zeit (in Sekunden oder Stunden). Kilowattstunden (kWh) ist also eine Energieeinheit.



James Prescott Joule
(1818 - 1889)

James Watt
(1736 - 1819)

Rechenbeispiel: Senkrechter Wurf nach oben

$$0 = v_0 - gT \quad \rightarrow \quad v_0 = gT$$

$$H = v_0 T - \frac{1}{2} gT^2 = gT^2 - \frac{1}{2} gT^2 \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$v_0 = gT = \sqrt{2gH}$$

kinetische Energie = Arbeit (potenzielle Energie)

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2 = mgH \quad \rightarrow \quad v_0^2 = 2gH \qquad v_0 = \sqrt{2gH}$$

Die Anwendung von Erhaltungssätzen kann die Berechnung erleichtern, bzw. ermöglichen, insbesondere wenn es nicht auf den zeitlichen Verlauf der Bewegung, sondern auf bestimmte Anfangs- und Endzustände ankommt.

Anmerkung: Erghaltungssätze können auf fundamentale **Symmetrien** zurückgeführt werden (Noether-Theoreme)

Energieerhaltung $\leftrightarrow$ Homogenität der Zeit
Impulserhaltung $\leftrightarrow$ Homogenität des Raums
Drehimpulserhaltung $\leftrightarrow$ Richtungsinvarianz des Raums

(mehr zum Drehimpuls demnächst)

Emmy Noether
(1882 - 1935)

2.1.7 Systeme von Massenpunkten

Mit dem Gravitationsgesetz haben wir eigentlich schon Systeme von zwei Massenpunkten betrachtet, die Kräfte aufeinander ausüben. Allerdings wurde eine Masse (Erde) immer als ortsfest angenommen, was nicht ganz richtig ist.

Grundbegriffe

Schwerpunkt von zwei gleichen Massen m:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right) = \frac{m \cdot \vec{r}_1 + m \cdot \vec{r}_2}{m+m}$$

für jede Dimension: arithmetisches Mittel

Schwerpunkt von zwei verschiedenen Massen $m_{1/2}$:

$$\vec{r}_S = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_1 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_1}$$

mit den Massen gewichteter Mittelwert

Schwerpunkt mehrerer Massen m_i: $$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Die Summe aller Impulse ist konstant: $$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = M \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}{M} = M \cdot \dot{\vec{r}}_S$$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob alle Massen in ihm vereinigt wären und die äußeren Kräfte an ihm angreifen. Wenn z.B. die Summe der äußeren Kräfte null ist, bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig geradlinig (Impulserhaltung).

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = M \cdot \ddot{\vec{r}}_S$$

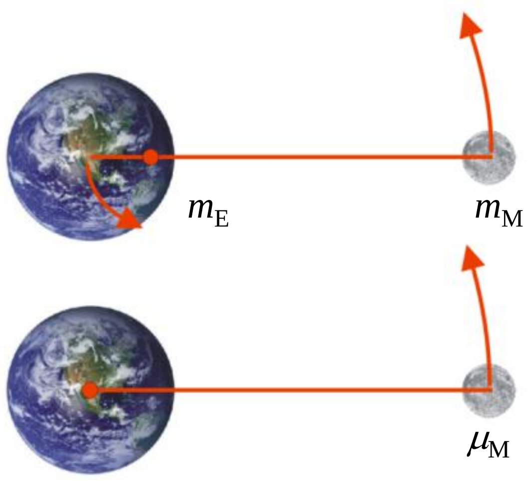
Beispiel: Erde und Mond, der Schwerpunkt ist ca. 4500 km vom Erdmittelpunkt entfernt

$$r_S = \frac{0\,\text{km} \cdot 597{,}4 \cdot 10^{22}\,\text{kg} + 370.000\,\text{km} \cdot 7{,}3 \cdot 10^{22}\,\text{kg}}{604{,}7 \cdot 10^{22}\,\text{kg}} = 4467\,\text{km}$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \qquad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = -\frac{\vec{F}_{12}}{m_2} \qquad \rightarrow \qquad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) \cdot \vec{F}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{F}_{12}$$

Statt der Bewegung beider Körper um den gemeinsamen Schwerpunkt kann man die Bewegung der leichteren Körpers (z.B. Mond) um den Schwerpunkt des schwereren Körpers (z.B. Erde) betrachten, wenn man statt der leichteren Masse die "**reduzierte Masse**" μ verwendet, z.B. Mond:

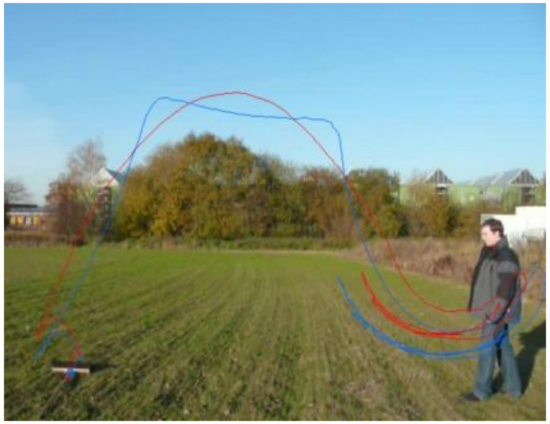
$$\mu_\text{M} = \frac{m_\text{E} \cdot m_\text{M}}{m_\text{E} + m_M} = \frac{4391 \cdot 10^{44}\,\text{kg}^2}{604{,}7 \cdot 10^{22}\,\text{kg}} = 7{,}26 \cdot 10^{22}\,\text{kg} = 0{,}988 \cdot m_\text{M}$$



Beispiel: Proton und Elektron im Bohrschen Atommodell

$$m_\text{p} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \qquad m_\text{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$$

$$\mu_\text{e} = 0{,}9995 \cdot m_\text{e}$$



Beispiel zur Bewegung des Schwerpunkts eines starren Körpers:

In einem Video wird ein Besen wird geworfen. Sein Schwerpunkt beschreibt eine Wurfparabel (rot), während andere Teile des Besens, z.B. die Bürste, eine kompliziertere Bewegung ausführen (blau).