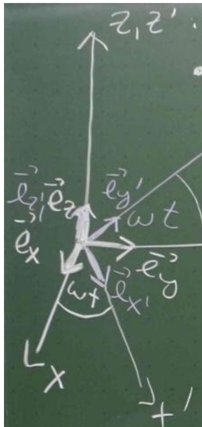
Klass. Relativitätstheorie

I Galilei-Trafos (letzte VL)

2 Beobachter O und O' bewegen sich mit $\vec{v}=\text{const}$ relativ zueinander.

II gleichförmig rotierende Bezugssysteme

(Beschleunigung! keine Inertialsysteme)



O: x, y, z

O': x', y', z'

O' rotiert gleichförmig gegen O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}=(0,0,\omega)$.

* Transformation des Ortsvektors von A

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}&=\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z\\ \vec{r}\,'&=\vec{e}_{x'}x'+\vec{e}_{y'}y'+\vec{e}_{z'}z'\end{aligned}\right\}\ \vec{r}=\vec{r}\,'$$

* Transformation der Geschwindigkeit von A

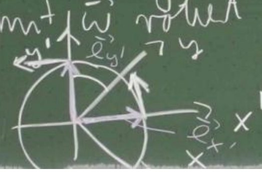
Beobachter in O: $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{e}_x\frac{dx}{dt}+\vec{e}_y\frac{dy}{dt}+\vec{e}_z\frac{dz}{dt}$

setze ein $\vec{r}=\vec{r}\,'$:

$$\Rightarrow \vec{v}=\frac{d\vec{r}\,'}{dt}=\underbrace{\vec{e}_{x'}\frac{dx'}{dt}+\vec{e}_{y'}\frac{dy'}{dt}+\vec{e}_{z'}\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}\,'}+\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}x'+\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}y'+\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}z' \qquad (3)$$

Produktregel

$\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}$ ist die Geschwindigkeit der Spitze von $\vec{e}_{x'}$, welche mit $\vec{\omega}$ rotiert etc



$\frac{d}{dt}\vec{e}_{x'}\propto\vec{e}_{y'}$, $\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\propto-\vec{e}_{x'}$

$\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}=0$

Kreisbewegung: $|\vec v| = |\vec\omega|\cdot|\vec r|$

Für Einheitskreis: $\frac{d}{dt}\vec e_{x'} = \omega\cdot\vec e_{y'}$

$$\frac{d}{dt}\vec e_{y'} = -\omega\,\vec e_{x'}$$

allgemein: $\frac{d}{dt}\vec e_{x'} = \vec\omega\times\vec e_{x'}$

hier: $\frac{d}{dt}\vec e_{x'} = \begin{vmatrix} \vec e_{x'} & 0 & 1\\ \vec e_{y'} & 0 & 0 \\ \vec e_{z'} & \omega & 0\end{vmatrix} = +\vec e_{y'}\cdot\omega$ ✓

analog: $\frac{d}{dt}\vec e_{y'} = \vec\omega\times\vec e_{y'}$ | $\frac{d}{dt}\vec e_{z'} = \vec\omega\times\vec e_{z'}$ in Gleichung (3) einsetzen

$$\vec v = \vec v' + \sum_{i=x',y',z'}(\vec\omega\times\vec e_i)\cdot i = \vec v' + \vec\omega\times\vec r$$

$$\vec v = \vec v' + \vec\omega\times\vec r \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \vec v' = \vec v - \vec\omega\times\vec r$$

* Transformation der Beschleunigung von A

O mißt $\vec a = \frac{d\vec v}{dt} \overset{(4)}{=} \frac{d\vec v'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec\omega\times\vec r)$

$$= \frac{d\vec v'}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec\omega}{dt}}_{=0 \text{ nach Voraussetzung}}\times\vec r + \vec\omega\times\underbrace{\frac{d}{dt}\vec r}_{\overset{(4)}{=}\vec v = \vec v' + \vec\omega\times\vec r}$$

$$\frac{d\vec v'}{dt} = \overbrace{\vec e_{x'}\frac{d\dot x'}{dt} + \vec e_{y'}\frac{d\dot y'}{dt} + \vec e_{z'}\frac{d\dot z'}{dt}}^{\vec a'}$$

$$+ \underbrace{\frac{d\vec e_{x'}}{dt}\cdot\dot x' + \frac{d\vec e_{y'}}{dt}\cdot\dot y' + \frac{d\vec e_{z'}}{dt}\cdot\dot z'}$$

Behandlung analog zur Geschwindigkeitstrafo

$$= \sum_{i=x',y',z'}(\vec\omega\times\vec e_i)\cdot(\dot i) = \vec\omega\times\vec v'$$

alles zusammen

$$\vec a = \vec a' + \vec\omega\times\vec v' + \vec\omega\times\vec v' + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$$

$$\Leftrightarrow \vec a' = \vec a - \underbrace{2\vec\omega\times\vec v'}_{\text{Coriolisbeschl.}} - \underbrace{\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)}_{\text{Zentrifugalbeschleunigung}}$$

2.1.5 Experimentelle Aspekte von Kräften

Bisher behandelt:
- Gravitationskraft
- Rückstellkraft einer Feder
- Lorentzkraft: elektrisches und magnetisches Feld
- Reibungskräfte
- Scheinkräfte

Gravitationskonstante

Gravitationskraft $\vec{F}_\mathrm{G} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{e}_r$ mit $G = 6{,}67408(31) \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$

Das *Committee on Data for Science and Technology* (CODATA) in Paris gibt Empfehlungen für die Werte von Nauturkonstanten heraus (www.codata.org). Manche Konstanten haben keine Unsicherheit, weil sie im Rahmen des SI-Einheitensystems exakt festgelegt wurden, z.B.

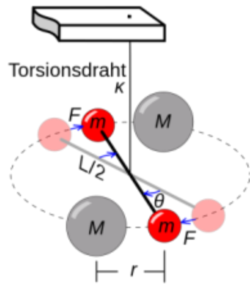
$$c = 299.792.458 \, \mathrm{m/s}$$

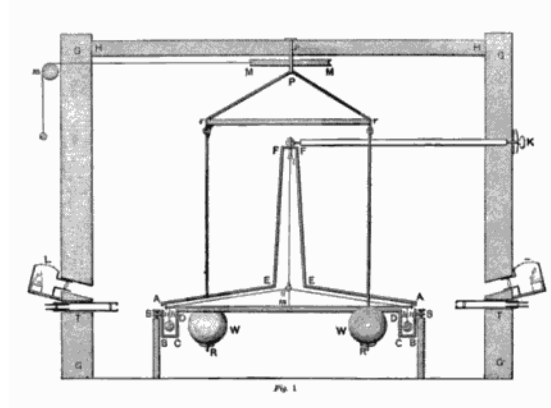
Die Gravitationskonstante hat , im Vergleich zu anderen Naturkonstanten einen relativ großen Fehler, da sie aufgrund der schwachen Anziehung zwischen Massen nur schwer messbar ist. Zum Vergleich die Elementarladung:

$$e = 1{,}602.176.620.8(98) \cdot 10^{-19} \, \mathrm{C}$$

Die elektrische Feldkonstante (das Analogon zur Gravitationskonstante) ist wiederum exakt festgelegt.

Experimentelle Bestimmung der Gravitationskonstante
ist mit Himmelskörpern nicht möglich, da deren Masse nicht genau genug bekannt ist. Bei Laborexperimenten sind die beteiligten Massen dagegen klein. Aufgrund der Empfindlichkeit der Messung eignet sie sich nicht gut für ein Demonstrationsexperiment in der Vorlesung.
Das Standardinstrument ist die Gravitationswaage, 1797 von Henry Cavendish in London erfunden.

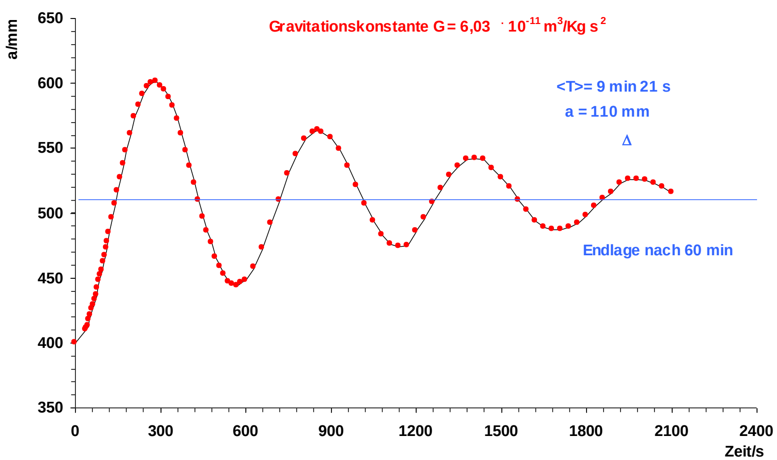




Henry Cavendish
(1731 – 1810)

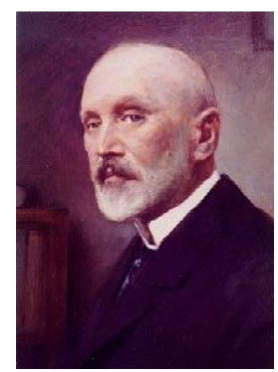
Gravitationsdrehwaage: Je eine große und eine kleine Kugel ziehen sich an, wobei im Wesentlichen die kleinen Kugeln an den Enden einer Stange, die an einem Draht hängt, beschleunigt werden. Die Drehbewegung wird über einen Spiegel mit einem Laserstrahl angezeigt. Aufgrund der Torsion des Drahts existiert eine nahezu lineare Rückstellkraft, sodass die beobachtete Bewegung Teil einer harmonischen Schwingung ist. Die Abhängigkeit einer solchen Schwingung vom Drehmoment und Trägheitsmoment der Anordnung ist Gegenstand des Kapitels über starre Körper.

Messung: Zur Zeit $t = 0$ s befinden sich die kleinen Kugeln in Ruhe in einem Gleichgewichtszustand (Gravitationskraft = Kraft aufgrund der Torsion). Dann werden die großen Kugeln in eine gegenüberliegende Lage gebracht. Die Kraft auf die Kugeln ist nun doppelt so groß wie die Gravitationskraft, weil sich die Kraft aufgrund der Torsion addiert (die Abstandsabhängigkeit der Gravitation wird vernachlässigt, weil die Amplitude der Bewegung sehr klein ist). Nach Beobachtung der gedämpften Schwingung wird die Gravitationskonstante entweder aus der Endlage nach Abklingen der Bewegung (Endlagenmethode) oder aus der beschleunigten Bewegung am Anfang der Schwingung (Beschleunigungsmethode) ermittelt.



Mit einer verbesserten Anordnung wurde die Gravitationskonstante auch von Loránd Eötvös (alias Roland von Eötvös) in Budapest bestimmt. Ferner untersuchte er die Äquivalenz von schwerer und träger Masse:
R. v. Eötvös et al., Ann. Phys. 373, 11 (1922).

In den 1980er Jahren wurden die Messungen von Eötvös neu analysiert und z.T. in Zweifel gezogen, was zur Vermutung einer "fünften Kraft" führte, deren Existenz sich jedoch bislang nicht bestätigte, siehe:
E. Fischbach et al. Phys. Rev. Lett. 56, 3 (1986).



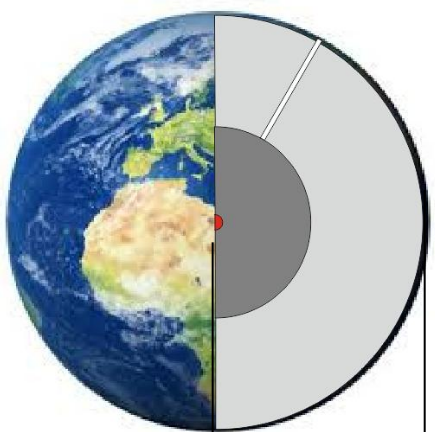
Roland v. Eötvös
(1848 - 1919)

Gravitationsfeld einer Kugel

Eigentlich müsste man die Gravitationskraft für jedes infinitesimale Massenelement der Erdkugel hinschreiben und über alle Elemente integrieren. Es zeigt sich aber (Beweis durch Integrieren über Kugelschalen oder Anwendung des Gaußschen Integralsatzes):

1) Außerhalb des Erdradius R wirkt die Kraft, als ob ihre Masse M in ihrem Mittelpunkt vereinigt sei.

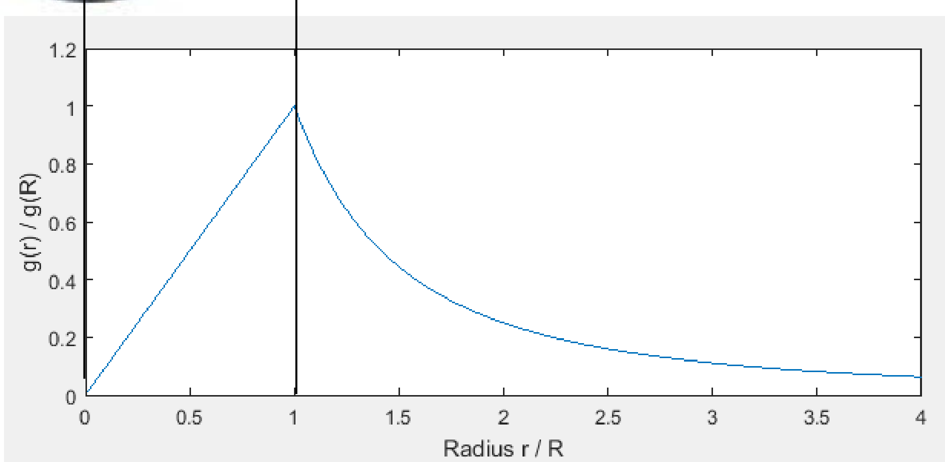
2) Innerhalb der Erde (Abstand r zum Erdmittelpunkt) wirkt die Masse innerhalb des Radius r, als ob sie im Mittelpunkt vereinigt sei. Anteile außerhalb des Radius r heben sich auf, solange die Massenverteilung kugelsymmetrisch ist. In der (sehr groben!) Näherung der Erde als homogene Kugel gilt:

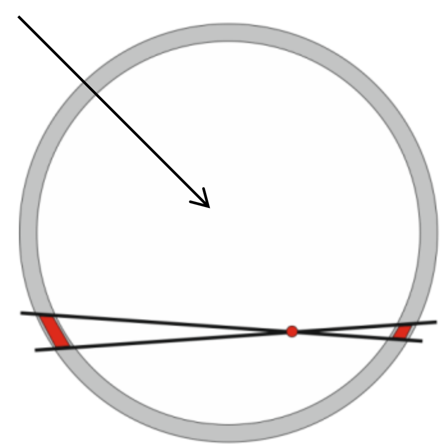


$$r \geq R \qquad F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$r < R \qquad F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3 = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^3} \cdot r$$

Zu 2) Ein Punkt im Inneren einer Kugelschale erfährt zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Gravitationskräfte von zwei Volumenelementen entlang einer Linie unter einem gegebenen Raumwinkel (die Flächen sind umgekehrt proportional zum Abstand zum Quadrat).





Federpendel

Das **Hooksche Gesetz** ist in der Natur in vielen Systemen näherungsweise erfüllt, z.B. Federpendel, Fadenpendel, Saiten eines Musikinstruments, Atome in einem zweiatomigen Molekül oder im Verband eines Kristallgitters, und viele andere Beispiele. Eine rücktreibende Kraft ist hierbei proportional zur Auslenkung aus einer Gleichgewichtslage:

$$F = m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$$

Die weite Verbreitung rührt z.T. daher, dass sich kompliziertere Kraftgesetze bei kleinen Auslenkungen durch den linearen Term einer Taylor-Reihe nähern lassen. Beispiel:

Fadenpedel

$$F = m \cdot \ddot{x} = m \cdot l \cdot \ddot{\alpha} = -m \cdot g \cdot \sin\alpha \quad \rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \omega^2 \cdot \sin\alpha = 0$$ **(Pendelgleichung)**

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Näherung für kleine Auslenkungen: $\sin\alpha \approx \alpha \quad \rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \omega^2 \cdot \alpha = 0$ **(harmonischer Oszillator)**

Die Lösung der Differenzialgleichung (DGL) ist eine sog. harmonische Schwingung, d.h. eine sinusförmige Abhängigkeit der Zeit mit einer Amplitude A und einer Phase φ

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

alternativ ausgedrückt durch eine Kombination von Sinus und Kosinus mit zwei Amplituden oder analogen Ausdrücken in Exponentialschreibweise:

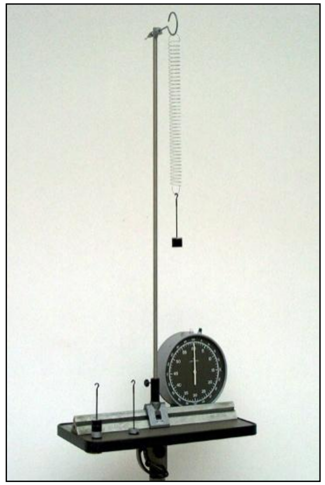
$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$$

$$x(t) = A \cdot \exp(i\omega t + \varphi) \qquad x(t) = A \cdot \exp(i\omega t) + B \cdot \exp(-i\omega t)$$

In jedem Fall legen zwei Parameter die Bewegung fest.

Versuche

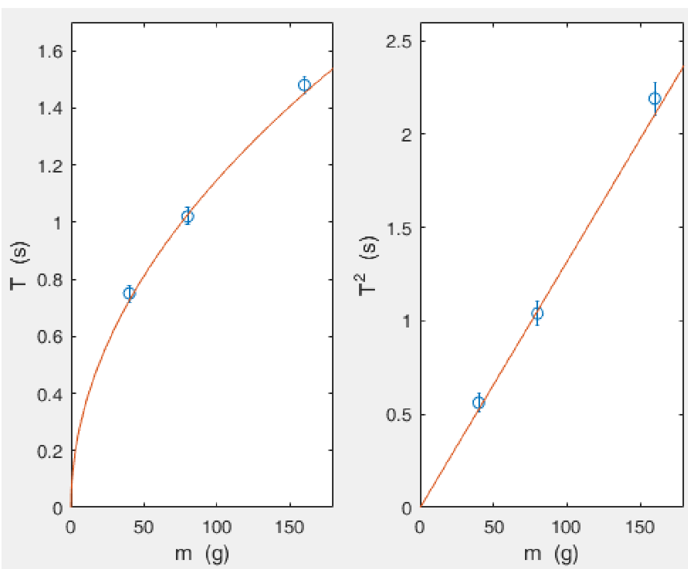
a) Federpendel



Federkonstante k = 3,0 N/m
Massen m = 40, 80, 160 g

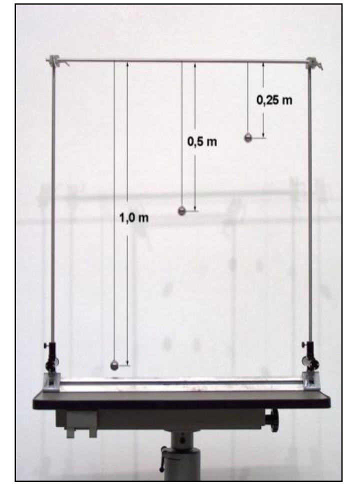
Dauer von 10 Schwingungen gemessen, angenommener Fehler ± 0,3 s

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Links wurde die Schwingungsdauer T, rechts T^2 gegen die Masse aufgetragen (linearer Verlauf $T^2 \sim m$).

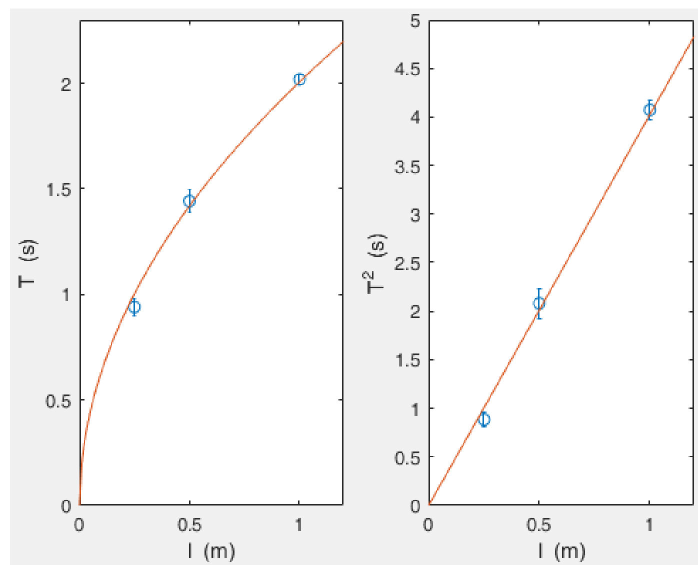
b) Fadenpendel



Pendellänge
l = 25, 50, 100 cm

Dauer von 10 Schwingungen 5x gemessen, angenommener Fehler = Standardabweichung

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Links wurde die Schwingungsdauer T, rechts T^2 gegen die Pendellänge l aufgetragen (linearer Verlauf $T^2 \sim l$).