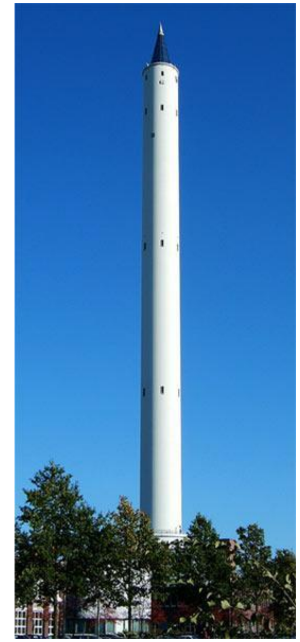
Zahlenbeispiel zum freien Fall:



Der Fallturm in Bremen (ZARM) dient der Erzeugung von Schwerelosigkeit im freien Fall für wissenschaftliche Experimente.

Fallzeit T einer Kapsel im Bremer Fallturm aus H = 110 m Höhe:

$$v(t) = -g \cdot t \qquad h(t) = h(0) - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = H - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$h(T) = 0\,\mathrm{m} = H - \frac{1}{2} g \cdot T^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} g \cdot T^2 = H \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{220\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2}{9{,}81\,\mathrm{m}}} = 4{,}74\,\mathrm{s}$$

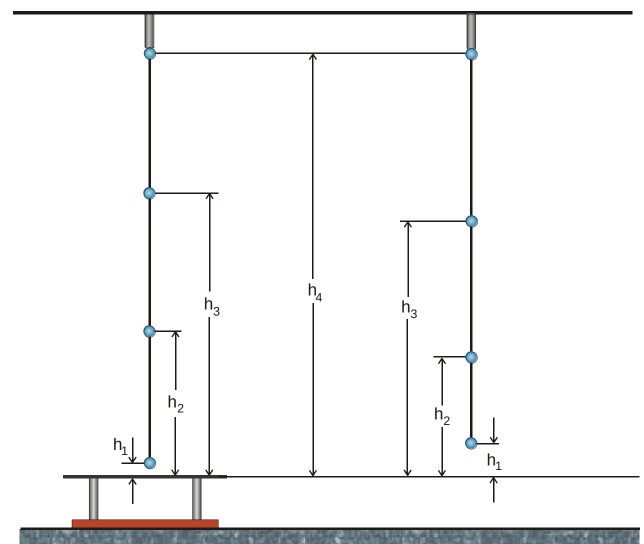
Während dieser Zeit herrscht in der Kapsel Schwerelosigkeit. Mit einem nachträglich installierten Katapult kann die Kapsel auch senkrecht nach oben geworfen werden, was die Zeit der Schwerelosigkeit verdoppelt (s. weiter unten).

Experimentelles Beispiel:

Fallschnüre: Mehrere Objekte fallen gleichzeitig aus verschiedener Höhe H_i

z.B. 2 Objekte $\quad T_2 - T_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H_2} - \sqrt{H_1} \right)$

Bei quadratisch zunehmenden Höhen sind die Auftreffzeiten äquidistant. Vergleich zweier fallender Schnüre mit je 4 Körpern mit linearem und quadratischem Abstand vom Ende der Schnur: Der Unterschied ist hörbar.



Unabhängige Überlagerung von Bewegungen

a) Zwei gleichförmige Bewegungen

Beispiel 1: Zwei gleichförmige Bewegungen entlang derselben Koordinate:
Ein Motorboot fährt mit 6 Knoten "Fahrt durchs Wasser" (Knoten = Seemeile pro Stunde = 1,852 km/h) einer Strömung von 2 Knoten entgegen. Die "Fahrt über Grund" ist 4 Knoten.

Beispiel 2: Zwei gleichförmige Bewegungen entlang verschiedener Koordinaten:
Ein Schwimmer durchquert mit 1,2 m/s einen Fluss von 240 m Breite senkrecht zur Strömung von 2 m/s. Zeit = 240 m geteilt durch 1,2 m/s = 200 s. Versatz entlang des Flusses = 2 m/s · 200 s = 400 m.

Könnte der Schwimmer "schräg" schwimmen, um ohne Versatz am direkt gegenüberliegenden Ufer anzukommen? Nein, dazu müsste seine Geschwindigkeit größer sein als die der Strömung.

Experimentelles Beispiel:

Eine Kugel fällt senkrecht nach unten (gleichmäßig beschleunigt), eine zweite hat zusätzlich eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit (geradlinig gleichförmig). Da beide Bewegungen unabhängig voneinander sind, kommen beide Kugeln gleichzeitig an, obwohl die zweite Kugel eine viel längere Bahn beschreibt.

Unabhängige Überlagerung von Bewegungen

b) Eine gleichförmige und eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung (typisches Beispiel: Wurf)

Beispiel 1: Gleichförmige und beschleunigte Bewegung entlang derselben Koordinate:
Eine Kapsel wird im Bremer Fallturm in der Zeit T auf eine Höhe von H = 110 m katapultiert

$$v(t) = v(0) - g \cdot t \qquad h(t) = v(0) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$0 = v(0) - g \cdot T \quad \rightarrow \quad T = \frac{v(0)}{g} \qquad H = h(T) = v(0)\frac{v(0)}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v^2(0)}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2(0)}{g}$$

$$v(0) = \sqrt{2g \cdot H} \qquad T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 4{,}74\,\mathrm{s}$$

entspricht zeitumgekehrt der Fallbewegung aus 110 m Höhe

Beispiel 2: Gleichförmige und beschleunigte Bewegung entlang verschiedener Koordinaten:
Waagerechter oder schiefer Wurf z.B. Wasserstrahl, beginnend bei $x = y = 0$ (Ort der Düse):

Vektorielle Schreibweise:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ -g \cdot t + v_y(0) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x(0) \cdot t \\ -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_y(0) \cdot t \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Bahnkurve? t eliminieren:

$$x = v_x(0) \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{v_x(0)} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{g}{2v_x^2(0)} x^2 + \frac{v_y(0)}{v_x(0)} x$$

mit

$$v_0 = \sqrt{v_x^2(0) + v_y^2(0)}$$

$$v_x(0) = v_0 \cdot \cos\alpha$$

$$v_y(0) = v_0 \cdot \sin\alpha$$

Wurfparabel:

$\alpha = 0$ waagerechter Wurf, Scheitel der Parabel im Ursprung
$\alpha > 0$ schiefer Wurf nach oben, Scheitel bei $t = v_y(0)/g$ und $x = v_x(0)v_y(0)/g$
$\alpha < 0$ schiefer Wurf nach unten, Scheitel nicht Teil der Flugbahn

"Wurfparabeln" am Vulkan Stromboli, eine der Liparischen Inseln in Süditalien. Bei normaler Aktivität finden mehrere Eruptionen pro Stunde statt. In diesem Bild sind die Flugbahnen der glühenden Steine bis zu *H* = 150 m hoch. Damit beträgt die senkrechte Komponente der Auswurf-geschwindigkeit fast 200 km/h:

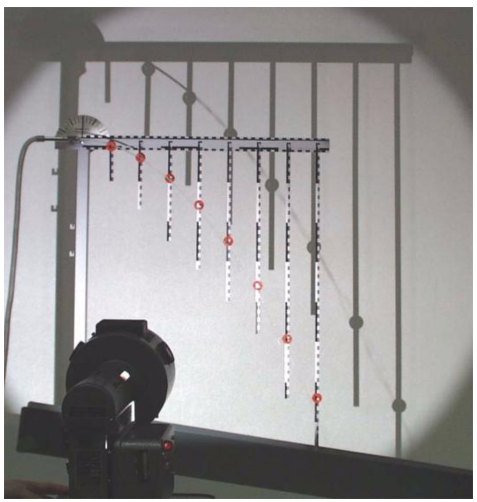
$$H = \frac{1}{2} g \cdot T^2 \qquad T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

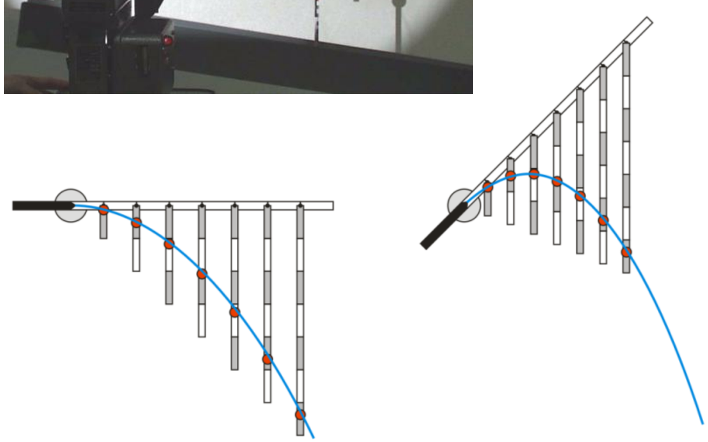
$$v = g \cdot T = \sqrt{2g \cdot H} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 150\,\mathrm{m}} = 54{,}2\,\mathrm{m/s} = 195\,\mathrm{km/h}$$

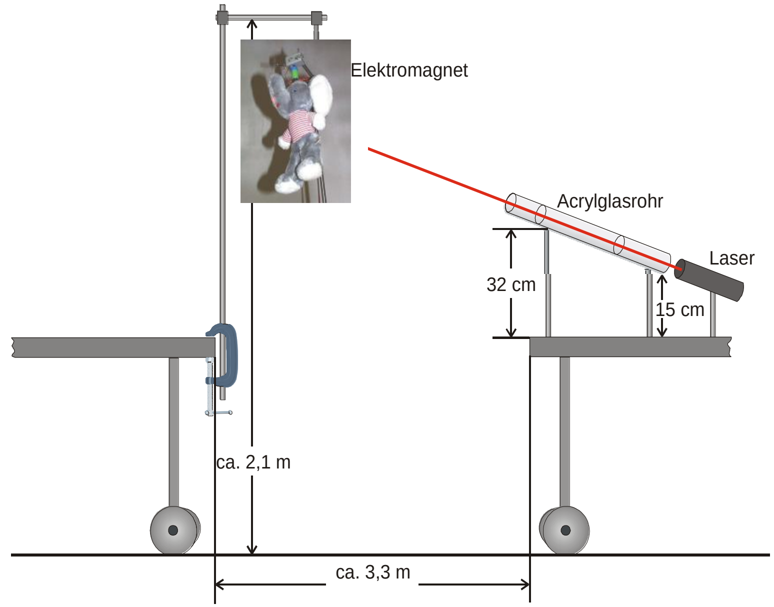
Ein Experiment im Jahr 1971 zum Nachweis der Tatsache, dass alle Körper "gleich schnell" fallen, d.h. die Fallbeschleunigung ist unabhängig von der Masse oder anderen Eigenschaften.
Astronaut David Scott (Apollo 15) lässt auf dem Mond einen Hammer und eine Falkenfeder gleichzeitig fallen (das Mondlandemodul trug den Namen *Falcon*). Im Rahmen der Genauigkeit des Versuchs war die Fallzeit beider Körper gleich.

Experiment: Wurfparabel mit Wasserstrahl

Ein Wasserstrahl tritt mit konstanter Geschwindigkeit aus einer Düse. An einer Stange tangential zum Austritt des Strahls hängen Maßstäbe mit Markierungen, die im Schattenbild auf den Wasserstrahl eingestellt werden. Hiermit kann der parabolische Verlauf des Strahls nachgemessen werden. Außerdem bleiben die Markierungen auf dem Strahl, wenn der Anfangswinkel geändert wird.







Experiment: Der Elefantenschuss

Ein "Gewehr" (Rohr mit Pressluft und Justierlaser) wird auf einen Elefanten ausgerichtet, der auf einem Baum sitzt (in einer früheren Version des Experiments war es ein Affe). Zum Zeitpunkt des Schusses lässt sich der Elefant fallen, um der Kugel zu entgehen, wird aber gerade deshalb getroffen.

Grund: Der gleichförmigen Bewegung der Kugel schräg nach oben überlagert sich eine Fallbewegung, die mit der des Elefanten identisch ist (s. Skizze).

Gleichförmige Kreisbewegung (konstante Winkelgeschwindigkeit)

Winkel in Bogenmaß α = s / R = Bogenlänge / Radius [α] = 1 rad

Winkelgeschwindigkeit ω = v / R = Geschwindigkeit / Radius [ω] = 1 rad / s

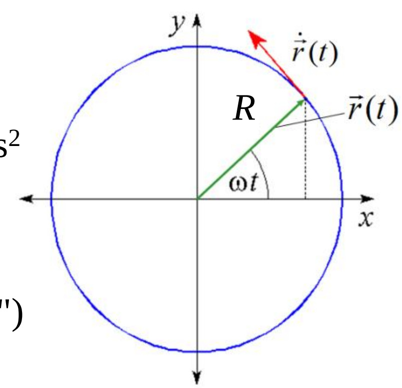
$$s = v \cdot t \qquad \alpha = \omega \cdot t$$

$$\vec{r}(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega \cdot t) \\ \cos(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = R \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\omega \cdot t) \\ -\sin(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t) = -\frac{v^2}{R^2}\vec{r}(t) \qquad |\vec{a}(t)| = \frac{v^2}{R^2}|\vec{r}(t)| \quad \rightarrow \quad \boxed{a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R}$$

Zentripetalbeschleunigung

$$|\vec{r}(t)| = R$$



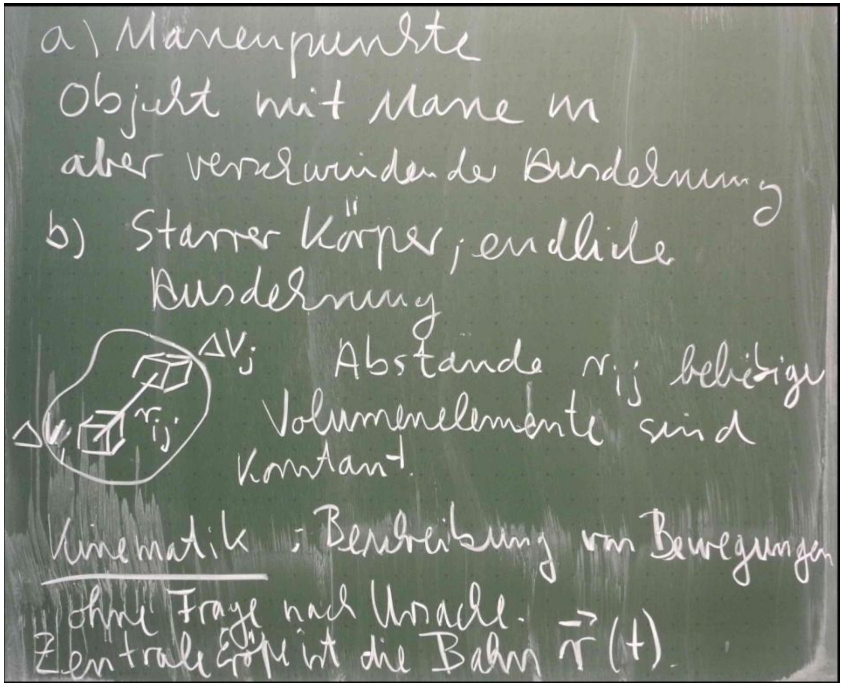
Beispiel: Ein Satellit ohne Antrieb kreist knapp über der Erdoberfläche (mittlerer Radius $R \approx 6370$ km), Die Zentripetalbeschleunigung ist g = 9,81 m/s^2

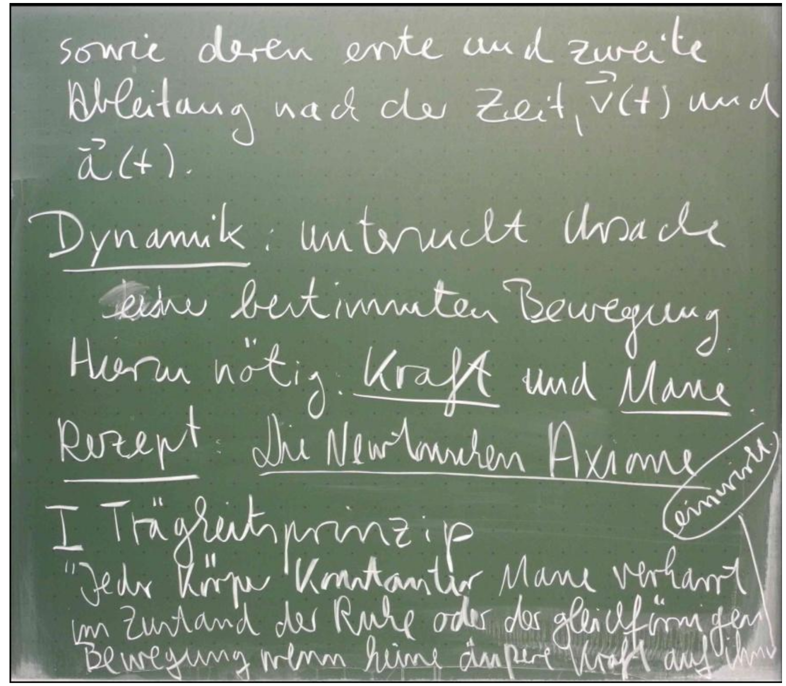
$$v = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{9{,}81\,\mathrm{m/s} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}} = 7{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 7{,}9\,\mathrm{km/s}$$

("Erste kosmische Geschwindigkeit")

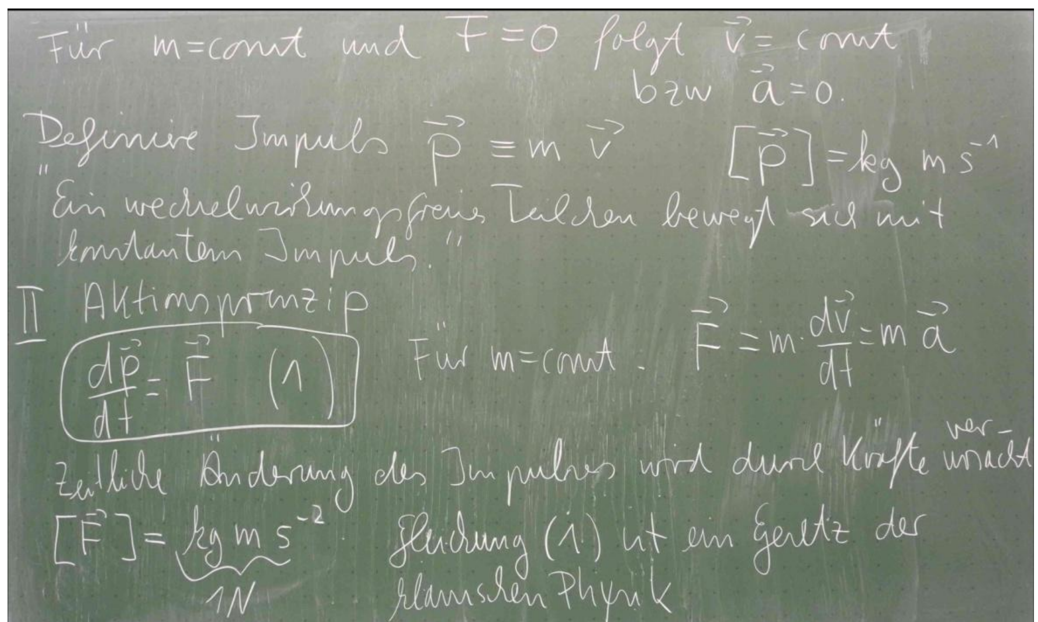
Die Beschleunigung ist stets zum Kreismittelpunkt und damit senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet. Ihr Betrag ist konstant. Die Winkelgeschwindigkeit heißt auch Kreisfrequenz. Hier ist f die Frequenz der Kreisbewegung (Umläufe pro Zeiteinheit) und T ist die Umlaufszeit:

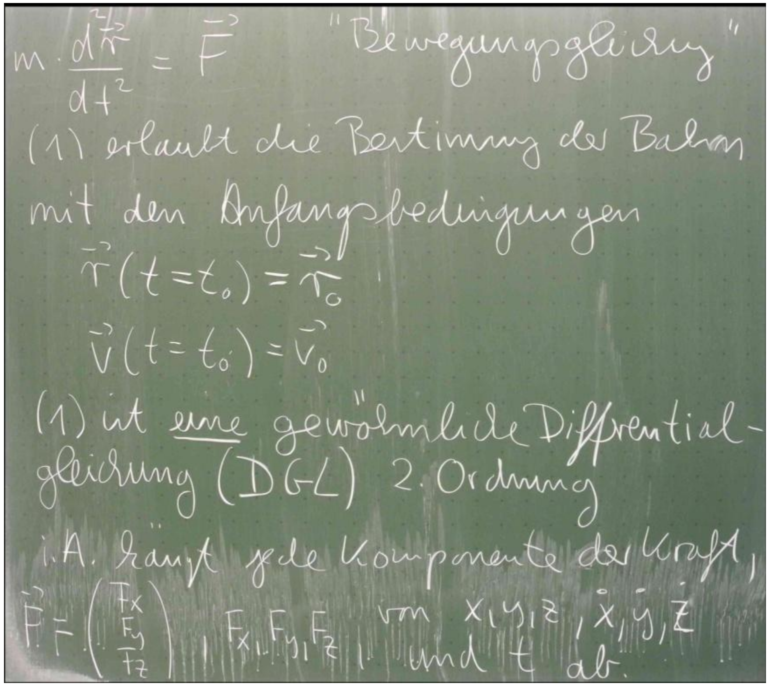
$$\omega = \frac{v}{R} = 2\pi \frac{v}{2\pi \cdot R} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

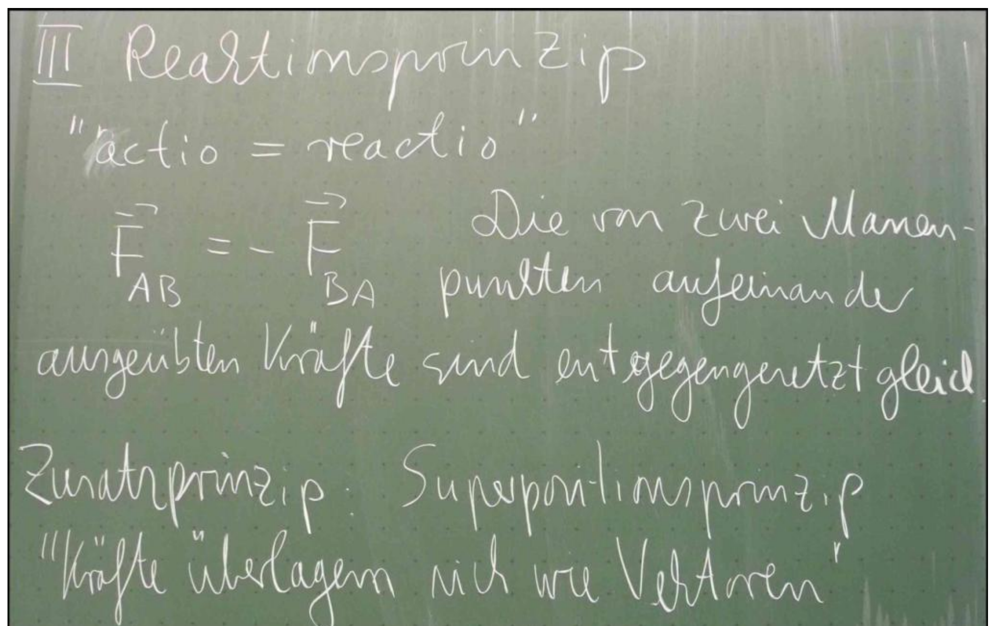




2.1.2 Newtonsche Axiome




$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ "Bewegungsgleichung"
(1) erlaubt die Bestimmung der Bahn
mit den Anfangsbedingungen
$\vec{r}(t=t_0) = \vec{r}_0$
$\vec{v}(t=t_0) = \vec{v}_0$
(1) ist eine gewöhnliche Differential-
gleichung (DGL) 2. Ordnung
i.A. hängt jede Komponente der Kraft,
$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$, F_x, F_y, F_z, von x, y, z, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$
und t ab.


III Reaktionsprinzip
"actio = reactio"
$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$
Die von zwei Massen-
punkten aufeinander
ausgeübten Kräfte sind entgegengesetzt gleich
Zusatzprinzip: Superpositionsprinzip
"Kräfte überlagern sich wie Vektoren"