Zur speziellen Relativitätstheorie

u.a. relevant in Teilchenbeschleunigern.

Beispiel: DELTA an der TU Dortmund
Elektronenspeicherring mit Strahlenergie 1,5 GeV.

1 eV ist die kinetische Energie, die eine Elementarladung beim Durchflug einer Beschleunigungsspannung von 1 V gewinnt. Die Ruheenergie eines Elektrons in dieser Einheit ist 511 keV (1 eV = 1 J /$1.6\cdot10^{-19}$ C)

Wie groß ist der Lorentzfaktor?

$$E = m\cdot c^2 = m_0\cdot\gamma\cdot c^2 \quad\rightarrow\quad \gamma = \frac{E}{m_0\cdot c^2} = \frac{1500\cdot10^6\ \text{eV}}{0{,}511\cdot10^6\ \text{eV}} = 2935$$

Hier wurde 1,5 GeV = $1{,}5\cdot10^9$ eV als Gesamtenergie angenommen (Ruhenergie + kinetische Energie). Der Unterschied zwischen Gesamtenergie und kinetischer Energie ist hier kleiner als der Messfehler (anders bei Protonen mit $m_0\cdot c^2$ = 938,3 MeV).

In den Dipolmagneten ist die Lorentzkraft gleich der Zentripetalkraft. Das magnetische Feld (genauer: magnetische Flussdichte) beträgt B = 1,5 T (Tesla). Wie groß ist der Biegeradius der Elektronenbahn?

$$p = m\cdot v = m_0\cdot\gamma\cdot\beta\cdot c \qquad E = m_0\cdot\gamma\cdot c^2$$

$$p = E\,\frac{\beta}{c} \qquad \beta\approx1 \quad\rightarrow\quad p/e \approx 1{,}5\cdot10^9\ \text{eV}\,\frac{1}{3\cdot10^8\ \text{m/s}} = 5{,}0\,\frac{\text{J}\cdot\text{s}}{\text{C}\cdot\text{m}}$$

$$\frac{m\cdot v^2}{R} = e\cdot v\cdot B \quad (\vec{v}\perp\vec{B}) \quad\rightarrow\quad \frac{p}{R} = e\cdot B \quad\rightarrow\quad R = \frac{p/e}{B} = 5{,}0\,\frac{\text{J}\cdot\text{s}}{\text{C}\cdot\text{m}}\,\frac{1}{1{,}5}\,\frac{\text{C}\cdot\text{m}^2}{\text{J}\cdot\text{s}} = 3{,}33\,\text{m}$$

Eine praktische Formel: $p[\text{GeV/c}] \approx 0{,}3\cdot B[\text{T}]\cdot R[\text{m}]$

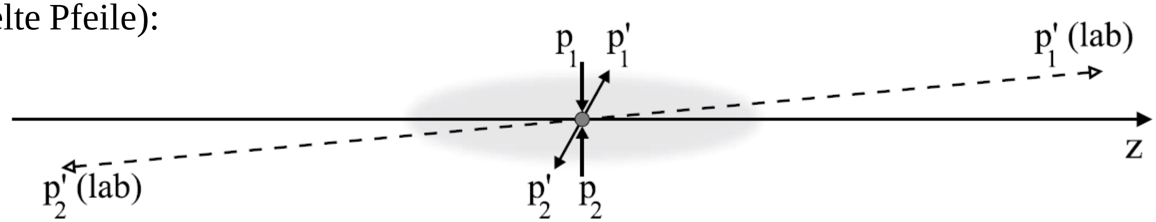
Nach ca. 10 Stunden ist etwa die Hälfte der Elektronen verlorengegangen. Zwei Effekte sind für die endliche "**Strahllebensdauer**" verantwortlich:

1) Ablenkung oder Energieverlust durch Streuung der Elektronen an Atomen des Restgases.
2) Streuung von zwei Elektronen aneinander (Möller-Streuung von zwei Spin-1/2-Teilchen, bei kleinen Winkeln ähnlich zur Rutherford-Streuung), der sogenannte Touschek-Effekt (B. Touschek 1921-1978, hat den ersten Elektronen-Positronen-Collider 1960 in Frascati gebaut).

Touschek-Effekt

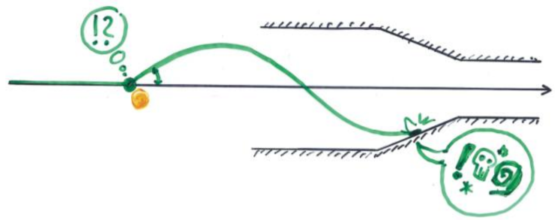
Bei der Elektron-Elektron-Streuung ist ein relativistischer Effekt entscheidend: Die Elektronen schwingen senkrecht zur Strahlrichtung mit typischen kinetischen Energien um 30 keV. Bei der Streuung wandelt sich, je nach Streuwinkel, ein Teil davon in kinetische Energie in Strahlrichtung um. Ein Elektron gewinnt diese Energie, das andere verliert sie. Im Vergleich zu 1,5 GeV sind 30 keV nur 0,002 Prozent, während die "Energieakzeptanz" des Speicherrings ca. 1 Prozent beträgt. Warum gehen trotzdem Elektronen verloren?

Elastische Streuung im Schwerpunktsystem der beiden Elektronen (durchgezogene Pfeile) und im Laborsystem (gestrichelte Pfeile):



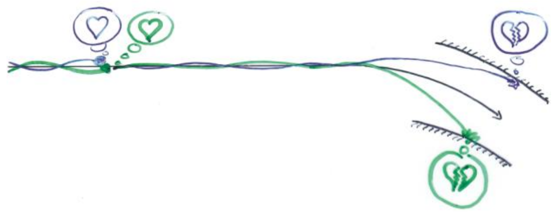
Lorentz-Transformation ist Laborsystem: Die kinetische Energie in Strahlrichtung wird (ungefähr) mit g = 2935 multipliziert, d.h. aus nur 5 keV wird 15 MeV, was 1 Prozent der Strahlenergie entspricht. Das der Wirkungsquerschnitt für Streuwinkel, die wesentlich von 0 und 180 Grad abweichen, sehr klein ist, sind solche Ereignisse relativ selten. Pro Umlauf um den Speicherring geht im Durchschnitt nur 1 Elektron verloren. Je höher ist die Elektronendichte ist, desto kleiner ist die sog. Touschek-Lebensdauer.

Elastische Streuung am Atomkern des Restgases (gelb) → Elektron wird abgelenkt.



Inelastische Streuung am Atomkern des Restgases (gelb) → Elektron verliert Energie.

Elastische Streuung zweier Elektronen im Strahl → ein Elektron gewinnt, das andere verliert Energie.



Experiment zum Schwerpunkt eines starren Körpers (hier: Besen)

Wird ein Besen in seinem Schwerpunkt unterstützt, ist die Summe der Drehmomente null und er bleibt auf dem Unterstützungspunkt, z.B. dem Finger des Studenten Kai, liegen. Nun wird der Besen von besagtem Studenten am Schwerpunkt fachgerecht zersägt. Welcher der beiden Teile (mit und ohne Bürste) ist schwerer? Durch demokratische Abstimmung wird entscheiden, dass der Teil ohne Bürste keinesfalls schwerer ist, während es kein eindeutiges Votum dafür gibt, ob der Teil mit Bürste schwerer ist oder ob beide Teile gleich schwer sind. Empirisch stellt sich heraus, dass der kürzere Teil mit Bürste deutlich schwerer ist.

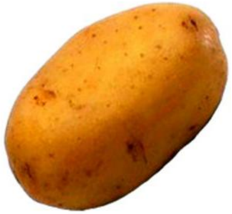
Die Erklärung ergibt sich aus der Formel für den Schwerpunkt eines starren Körpers bzw. der Betrachtung der Drehmomente (Gewichtskraft × Hebelarm). Bei zwei gleichgroßen Drehmomenten ist die Kraft um so größer, je kürzer der Hebelarm ist. Im Fall der Bürste mit kurzem Stiel ist das Gewicht größer als das Gewicht des langen Teils ohne Bürste.

3 Mechanik des starren Körpers

3.1 Modell des starren Körpers

Bei der Modellvorstellung des "starren Körpers" besitzt ein Körper im Gegensatz zur Punktmasse eine Ausdehnung und Form. Eine Veränderung dieser Form findet aber nicht statt oder ist vernachlässigbar. Während sich an der Translationsbewegung im Vergleich zur Punktmasse nichts ändert, kann ein starrer Körper auch rotieren.





Beispiel: Für die Himmelsmechanik ist es ausreichend, die Erde als Punktmasse zu betrachten. Die Erdrotation wird durch das Modell des starren Körpers beschrieben. Die Deformation der Erde z.B. aufgrund der Rotation oder durch Gezeitenkräfte ist in diesem Modell nicht enthalten.

Schwerpunkt von N Punktmassen

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i$$

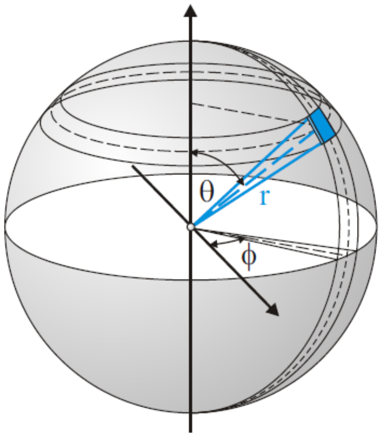
Schwerpunkt des starren Körpers

$$V = \int_V dV \qquad M = \int_V \rho \cdot dV$$

ρ : Dichte = Masse / Volumen $[\rho]$ = kg/m^3
hier lokale Dichte z.B. $\rho(x,y,z)$ in kartesischen Koordinaten

$$r_S = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

Die Integration hängt im Detail vom Koordinatensystem ab, z.B. in kartesischen oder Kugelkoordinaten



$$V = \int_V dV = \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} dz dy dx \quad \text{oder} \quad \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta dr d\varphi$$

Beispiel: Schwerpunkt eines homogenen Körpers (Dichte ρ = const)

$$r_S = \frac{\rho}{M}\int_V \vec{r}\cdot dV = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\cdot dV$$

z.B. homogene Halbkugel mit $x_S = y_S = 0$ und $z = r\cdot\cos\theta$

$$z_S = \frac{1}{V}\int_V z\cdot dV = \frac{1}{V}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} z\cdot r^2\cdot\sin\theta\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\varphi = \frac{1}{V}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\varphi = \frac{3}{8}R$$

3.2 Bewegung des starren Körpers

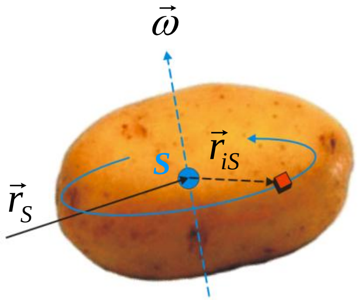
3.2.1 Allgemeines

Bewegung des Elements i relativ zum Schwerpunkt $\quad \vec{r}_{iS} = \vec{r}_i - \vec{r}_S \qquad \frac{d\vec{r}_{iS}}{dt} = \vec{v}_{iS} = \vec{v}_i - \vec{v}_S$

Betrag bzw. Quadrat des Ortsvektors ist zeitlich konstant: $\quad \frac{d}{dt}\vec{r}_{iS}^{\,2} = 2\vec{r}_{iS}\cdot\vec{v}_{iS} = 0 \quad$ d.h. $\quad \vec{r}_{iS}\perp\vec{v}_{iS}$

Die Bewegung relativ zum Schwerpunkt ist also immer eine Drehbewegung mit momentaner Winkelgeschwindigkeit ω.
Die Bewegung eines starren Körpers lässt sich immer durch eine Kombination von **Translation** und **Rotation** beschreiben, wobei die Wahl der Rotationsachse nicht eindeutig ist (muss nicht durch den Schwerpunkt gehen).

$$\vec{v}_{iS} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{iS}$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_S + \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{iS}\right)$$

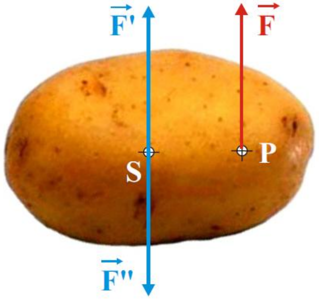


Die Bewegung eines starren Körpers hat **6 Freiheitsgrade**, d.h. maximal 6 Koordinatenangaben sind erforderlich, um die Bewegung vollständig zu beschreiben, 3 für die Translation und 3 für die Rotation. Zusätzliche Festlegungen (z.B. keine Translation, Festlegung der Rotationsachse) reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade.

3.2.2 Kräfte und Drehmoment

Sechs Freiheitsgrade: Translation in 3 Richtungen, Rotation um 3 Achsen

Die Angabe einer Kraft F erfordert bei einem ausgedehnten Körper auch die Angabe eines Angriffspunkts P. Die Einführung zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte $F'=F$ und F'', die am Schwerpunkt S angreifen, ändern an der Bewegung nichts. Damit:



F' bewirkt eine Beschleunigung → Translation
F'' und F bewirken zusammen ein Drehmoment bzgl. S → Rotation

Das Drehmoment ist hier $\vec{D}_S = \vec{r}_{iS} \times \vec{F}$ $\quad [D] = 1\,\mathrm{N\,m}$

(Hebelarm × Kraft)

Wird ein Körper in seinem Schwerpunkt aufgehängt, ist die Summe aller Drehmomente null (vgl. Balkenwaage).

Allgemein gehört zur Angabe eines Drehmoments die Angabe des Bezugspunkts (der nicht unbedingt der Schwerpunkt sein muss). Das Drehmoment ist die zeitliche Ableitung des Drehimpulses:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{D}$$

Die Richtungen von Drehimpuls- und Drehmomentvektor geben einen Drehsinn an. Man nennt sie **axiale Vektoren**. Andere Vektoren (z.B. Kraft, Geschwindigkeit) geben eine Richtung an. Das sind **polare Vektoren**.
Bei einer Spiegelung am Ursprung des Koordinatensystems, d.h. einer Umkehrung aller Richtungen, ändern polare Vektoren ihr Vorzeichen, während polare Vektoren invariant bleiben. Da sich axiale Vektoren aus dem Kreuzprodukt zweier polarer Vektoren ergeben, ist ihre Angabe nur im 3-dimensionale Raum sinnvoll.

3.2.3 Rotationsenergie und Trägheitsmoment

Kinetische Energie bei einer Rotation mit Winkelgeschwindigkeit ω

Massenelement $$E_i = \frac{1}{2}\Delta m_i \cdot v_i^2 = \frac{\omega^2}{2} r_{i\perp}^2 \cdot \Delta m_i \qquad v_i = \omega \cdot r_{i\perp} \qquad \left(r_{i\perp} \text{ Abstand senkrecht zur Drehachse} \right)$$

gesamter Körper $$E_{rot} = \frac{\omega^2}{2} \int_V r_\perp^2 \cdot dm = \frac{\omega^2}{2} \int_V r_\perp^2 \cdot \rho \cdot dV$$

Trägheitsmoment I $$E_{rot} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \qquad \text{mit} \qquad I = \int_V r_\perp^2 \cdot dm = \int_V r_\perp^2 \cdot \rho \cdot dV$$

Drehimpuls für ein Massenelement $$\vec{L}_i = r_{i\perp} \cdot \Delta m_i \cdot v_i \cdot \vec{e}_\omega = r_{i\perp}^2 \cdot \Delta m_i \cdot \vec{\omega}$$

Drehimpuls des gesamten Körpers $$\vec{L} = \int_V r_\perp^2 \cdot dm \cdot \vec{\omega} = I \cdot \vec{\omega}$$

(vgl. Zentrifugalterm bei der Bewegung im Zentralkraftfeld) $$E_{rot} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Zeitl. Änderung des Drehimpulses = Drehmoment $$\vec{D} = I \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

Schwungräder werden zur Speicherung von Energie verwendet.

Beispiel 1: Schwungradspeicher zum Ausgleich von Schwankungen der Stromversorgung (Krankenhäuser, Industrie, manche Beschleuniger).

Beispiel 2: Gyrobus der Firma Oerlikon (Schweiz), eingesetzt in den 1950er Jahren in der Schweiz, in Gent (Belgien) und in Leopoldville (Belgisch-Kongo).
Schwungrad: M = 1,5 t, R = 0,8 m, f = 3000 U/min