Lorentztransformationen:

(Konsistent mit Einsteinschen Postulaten)

v: Relativgeschwindigkeit

Relativbewegung sei in x–x'–Richtung

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow t' = t$$

Galilei-trafos für $v \ll c$

Inverse Trafos

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

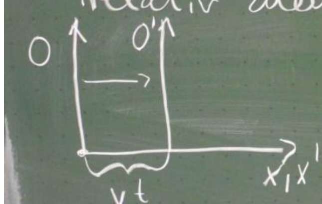
$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

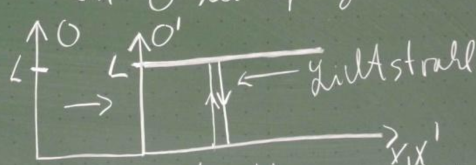
statt Koordinatentrafo des 3-Dim Raumes (x,y,z)
→ 4-Dim
= 3 Dim Raum + 1 Dim Zeit
(t,x,y,z)
"Raumzeit"

* $t \neq t'$ kein universeller Zeitbegriff
  keine universelle Gleichzeitigkeit mehr
* Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

* Zeitdilatation; Zeitintervalle sind relativ
  "Bewegte Objekte leben länger"
  Lorentzkontraktion; räumliche Abstände sind relativ
  "Bewegte Objekte sind kürzer"
* Systeme O, O' bewegen sich in gemeinsamer x-x'-Achse relativ zueinander. Sie überschneiden sich bei t=0



In O' sei Spiegel mit Abstand L von x,x'-Achse



Bei $t=0$ wird Lichtstrahl senkrecht zur $x^{(\prime)}$-Achse ausgesandt.

T': Zeit für Rückkehr des Lichtes in O'

$$T' = \frac{2L}{c}$$

V', V } (Geschwindigkeit gemessen im getriebenen / ungetriebenen System)

$$V' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dt'}}_{\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}} \overset{\text{L-Trafo}}{=} \underbrace{\frac{d(x-vt)}{dt}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\frac{dx'}{dt}} \cdot \left(\frac{d\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)}{dt}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,(V-v)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(1-\frac{v}{c^2}V\right)\right)^{-1} = \frac{V-v}{1-\frac{vV}{c^2}}$$

für $V \ll c$ erhalten wir das Additionstheorem à la Galilei

Für einen Lichtstrahl mit $V=c$:

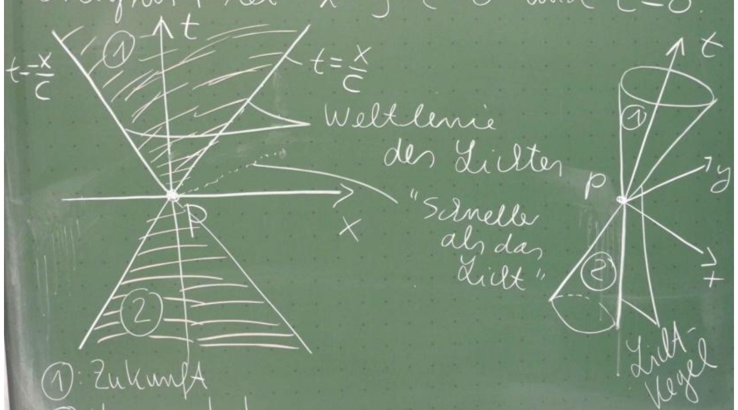
$$V' = \frac{c-v}{1-\frac{vc}{c^2}} = \frac{c^2(c-v)}{c^2-vc} = \frac{c^2(c-v)}{c(c-v)} = c \checkmark$$

* c ist obere Geschwindigkeit

Minkowskidiagramme / Kausalität

„Ereignis" definiert durch Raumzeitpunkt

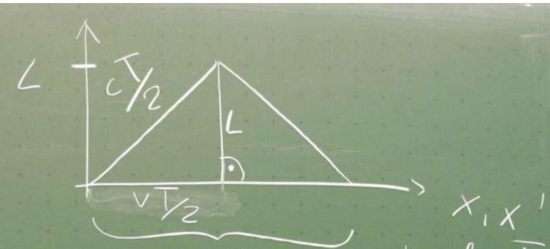
Ereignis P bei $x=y=z=0$ und $t=0$.



① Zukunft

② Vergangenheit

In O

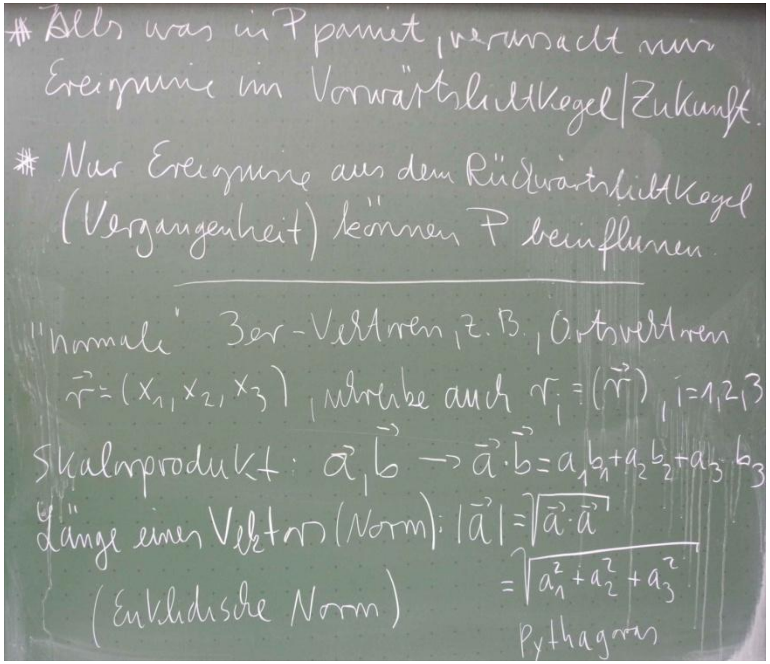


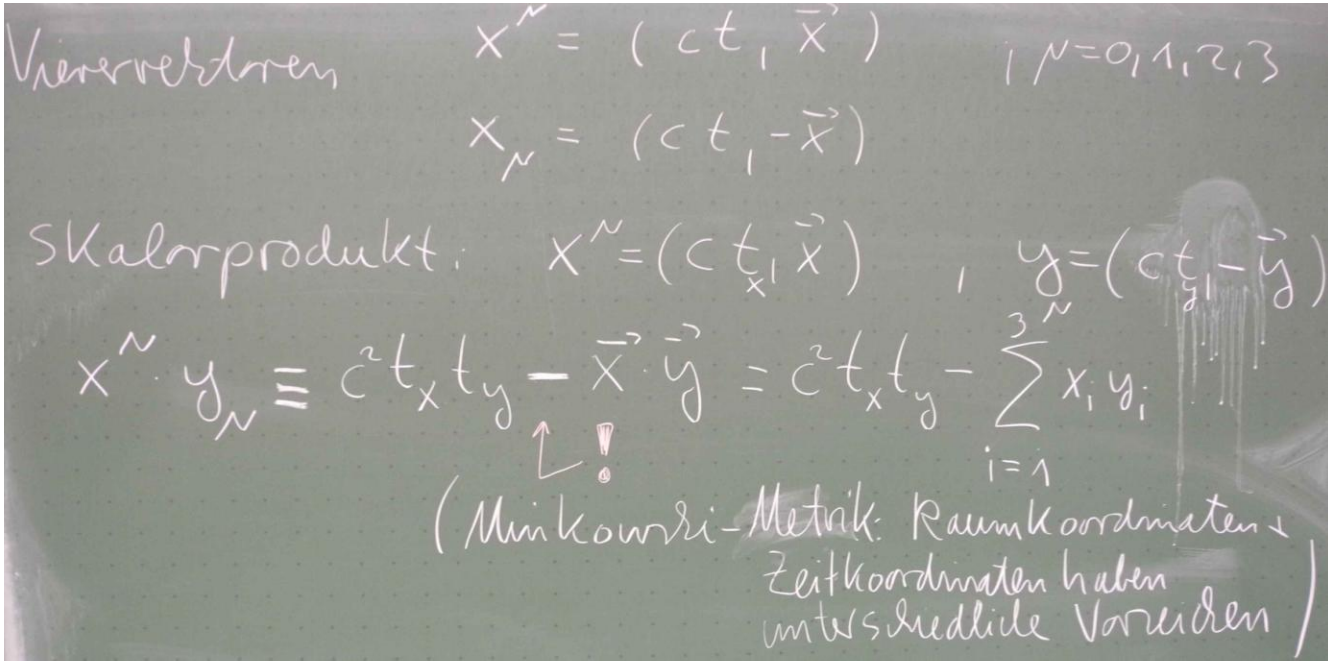
nach T auflösen

$$\left(\frac{cT}{2}\right)^2 = L^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow T^2\left(\frac{c^2}{4}-\frac{v^2}{4}\right) = T^2\left(\frac{c}{2}\right)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = L^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{2L}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = T'\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad T > T'.$$


* Alles was in P passiert, verursacht nur Ereignisse im Vorwärtslichtkegel | Zukunft.
* Nur Ereignisse aus dem Rückwärtslichtkegel (Vergangenheit) können P beeinflussen.
"normale" 3er-Vektoren, z.B. Ortsvektoren
$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, schreibe auch $r_i = (\vec{r})_i$, $i = 1,2,3$
Skalarprodukt: $\vec{a}, \vec{b} \to \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Länge eines Vektors (Norm): $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
(Euklidische Norm)
Pythagoras


Vierervektoren
$x^\mu = (ct, \vec{x})$, $\mu = 0,1,2,3$
$x_\mu = (ct, -\vec{x})$
Skalarprodukt: $x^\mu = (ct_x, \vec{x})$, $y = (ct_y, -\vec{y})$
$x^\mu \cdot y_\mu \equiv c^2 t_x t_y - \vec{x}\cdot\vec{y} = c^2 t_x t_y - \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$
!
(Minkowski-Metrik: Raumkoordinaten + Zeitkoordinaten haben unterschiedliche Vorzeichen)