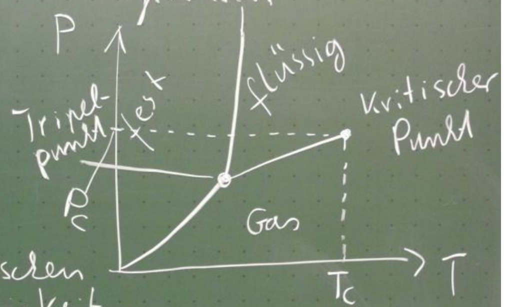
Hydrodynamik

typisches Phasendiagramm

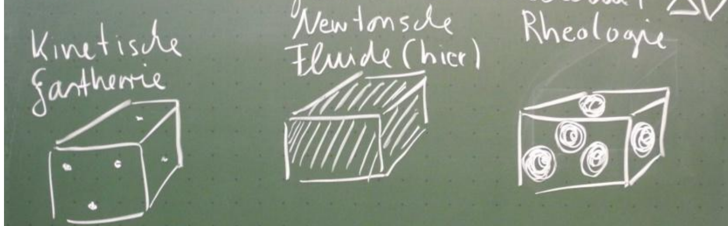
Jenseits des kritischen Punktes verschwindet der Unterschied zwischen Gasen und Flüssigkeiten



Gase/Flüssigkeiten: nehmen den zur Verfügung stehenden Raum ein, keine Gitterstruktur.

Hydrodynamik beschreibt Flüssigkeiten und nicht zu stark verdünnte Gase.

Betrachte Flüssigkeitsvolumenelement ΔV



ΔV muß hinreichend groß sein, um keine Abhängigkeit von molekularer Struktur zu bekommen, aber auch klein genug, sodaß man die Gesamtflüssigkeit als Kontinuum aus ΔV's betrachten kann.

Ideales Gas: $pV = n k_B T$ (x)

p, V, T: Zustandsgrößen, sind Funktionen von $\vec{r}, t$.

Die Gasgleichung (x) gilt im lokalen Gleichgewicht

Zur Beschreibung von Bewegung benutzen wir das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$

oder das Stromdichtefeld $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)$

Hydrodynamik = Beschreibung eines Systems im lokalen Gleichgewicht.

Der Zustand einer bewegten Flüssigkeit wird durch 5 Größen festgelegt: $\vec{v}$ und dann 2 weitere Größen aus der Thermodynamik, z.B. ρ, p.

<u>Ideale Fluide</u>:
- keine Viskosität (innere Reibung)
- keine Wärmeleitfähigkeit

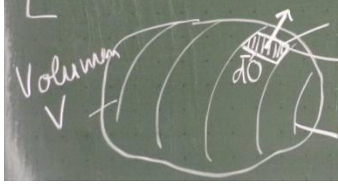
Ideale Fluide werden durch 5 Gleichungen beschrieben:

- 3 Eulergleichungen ("Bewegungsgleichungen")
- Kontinuitätsgleichung ✓
- Adiabatengleichungen

Kontinuitätsgleichung

Hydrodynamik: Erhaltung der Masse

[Elektrodynamik: Erhaltung der elektrischen Ladung]



Oberflächenelement

Oberflächennormale, zeigt nach außen

$O = O(V)$ Oberfläche

Die Änderung der Masse im Volumen V mit Oberfläche $O(V)$ ist gegeben durch

"Zufluß − Abfluß" (jeweils durch Oberfläche)

$\rho = \rho(\vec{r}, t)$: Massendichte

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$: Änderung von ρ bei $\vec{r} = \text{const}$

$$\text{Massenänderung} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oint_O \underbrace{\rho \vec{v}}_{\vec{j}}\, d\vec{O}$$

(Minuszeichen wegen "Abfluß" / $d\vec{O}$ zeigt nach außen)

$$\overset{\text{Satz von Gauß}}{=} -\int_V \vec{\nabla}(\rho \vec{v})\, dV \Bigg\} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$$

allgemein:

$f = f(\vec{r}, t)$

totale Ableitung "substantielle" Ableitung

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} f \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}.$$

Damit folgt für die Kontinuitätsgleichung mit

$$\vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v}) = \rho\, \vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla} \rho) \vec{v}}_{\frac{d\rho}{dt}} + \rho\, \vec{\nabla} \vec{v} = 0$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \vec{\nabla} \vec{v} = 0}$$

Bewegungsgleichungen (Euler-gleichungen)

* Lagrangedarstellung: betrachte Bahn $\vec{r}_i(t)$ eines einzelnen "Flüssigkeitsteilchens" ΔV_i (→ Mechanik)
* HIER: Eulersche Darstellung: betrachte physikalische Größen als Felder, Funktionen von $\vec{r}, t$ anstelle von Bahnen einzelner Teilchen

Beispiel: $\vec{v}(\vec{r}, t)$ Geschwindigkeitsfeld

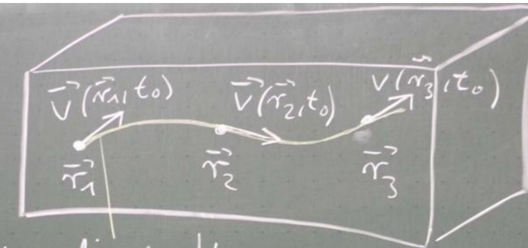


Foto bei $t = t_0$

Stromlinie = Kurven, deren Tangenten an jedem Ort $\vec{r}$ mit der Richtung der Geschwindigkeit übereinstimmen

i.A. gilt Stromlinie $\neq$ Bahn eines Flüssigkeitsteilchens

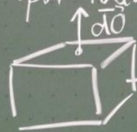
denn

Stationäre Strömung: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, d.h. $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$

Für diesen Spezialfall gilt Stromlinie = Bahn.

Eulersche Gleichungen = Newtonschen Bewegungsgleichungen für ideale Fluide

Flüssigkeitselement



Oberfläche, $d\vec{O}$: Normalenvektor

Auf die geschlossene Oberfläche des Elements wirkt die Kraft

$$\vec{F} = -\oint_O p \, d\vec{O} \underset{\text{Gauß}}{=} -\int_V \vec{\nabla} p \, dV \underset{\text{Newton „}m\cdot\vec{a}\text{"}}{=} \int_V \left(\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\right) dV$$

p: Druck

Beachte: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{v}$ (allg. Form der totalen Ableitung)

Es folgt $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}}$

3 Gleichungen

* Konvektionsterm $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{v}$ ist nichtlinear
* Im Schwerefeld der Erde gilt ferner
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}$$
* Randbedingungen: Flüssigkeiten an Wand haben nur tangentiale Geschwindigkeit $\vec{v}\cdot\vec{n}\big|_{\text{Wand}} = 0$