Erzwungene Schwingungen / Resonanz

$m\ddot{y} + \lambda\dot{y} + k y = F_e(t)$

$m, \lambda, k = \text{const}$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung für $F_e(t) = F_0 e^{i\omega_E t}$

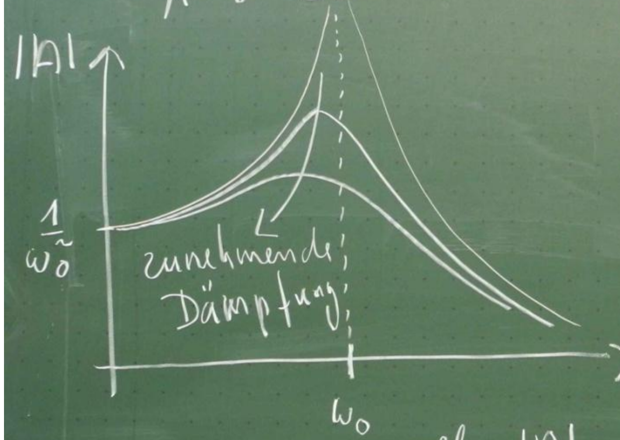
$\omega_E = \text{const}$

Lösungsansatz: $y(t) = C\, e^{i\omega_E t}$

$\Rightarrow C = \frac{F_0}{m}\cdot A$; $A = \frac{1}{-\omega_E^2 + 2i\gamma\omega_E + \omega_0^2}$; $A \in \mathbb{C}$

$\frac{k}{m} = \omega_0^2$; $\frac{\lambda}{m} = 2\gamma$; $A = |A|\cdot\exp(i\delta)$

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2}}$$



— schwache Dämpfung $\gamma \ll \omega_0$

$|A|_{max} = \frac{1}{2\gamma\,\omega_0}$ (schwache Dämpfung)

allg. $|A|_{max} = \frac{1}{2\gamma}\,\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$

$F_e(t)$ sei allgemein

Sei y_1 Lösung von $\ddot{y} + \frac{\lambda}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = F_1 e^{i\omega_1 t}$

— y_2 — " — $\ddot{y} + \frac{\lambda}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = F_2 e^{i\omega_2 t}$

Dann ist $y_1 + y_2$ Lösung von $\ddot{y} + \frac{\lambda}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = F_1 e^{i\omega_1 t} + F_2 e^{i\omega_2 t}$

Grund: lineare DGL

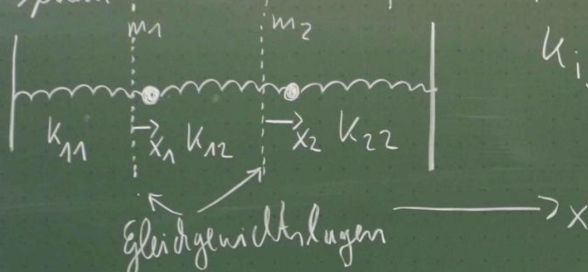
Fourierdarstellung einer allgemeinen periodischen Funktion

$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k\, e^{ikt}$; $F_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dt\, F(t)\, e^{-ikt}$

nicht periodisch: Fourierintegral

Gekoppelte Schwingungen

System mit 2 Massenpunkten, über Federn gekoppelt



k_{ij}: Federkonstanten

Bewegungsgleichungen: $m_1\ddot{x}_1 = -k_{11}x_1 - k_{12}(x_1-x_2)$

$\wedge \quad m_2\ddot{x}_2 = -k_{22}x_2 - k_{12}(x_2-x_1)$

gekoppelte DGL, linear, homogen, konstante Koeffizienten $\Leftrightarrow$

$\ddot{x}_1 = -\frac{k_{11}}{m_1}x_1 - \frac{k_{12}}{m_1}(x_1-x_2)$

$\wedge \quad \ddot{x}_2 = -\frac{k_{22}}{m_2}x_2 - \frac{k_{12}}{m_2}(x_2-x_1)$

einfacher Spezialfall: $m_1=m_2$; $k_{11}=k_{22}$

$\frac{k_{12}}{m_1}=\frac{k_{12}}{m_2}\equiv\Delta\omega^2$; $\frac{k_{11}}{m_1}=\frac{k_{22}}{m_2}\equiv\omega_0^2$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 = -(\omega_0^2+\Delta\omega^2)x_1 + \Delta\omega^2 x_2$

$\wedge \quad \ddot{x}_2 = +\Delta\omega^2 x_1 - (\omega_0^2+\Delta\omega^2)x_2$

addiere: $\ddot{x}_1+\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = -\omega_0^2(x_1+x_2)$

subtrahiere: $\ddot{x}_1-\ddot{x}_2 = -(\omega_0^2+2\Delta\omega^2)(x_1-x_2)$

$\Rightarrow$ die DGL's in Summe und Differenz der Koordinaten sind entkoppelt!

$X = x_1+x_2$; $d = x_1-x_2$ (Relativbewegung)

$\ddot{X} = -\omega_0^2 X$, $\ddot{d} = -(\omega_0^2+2\Delta\omega^2)d$

Lösung: $X(t) = C_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1)$

C_1, φ_1: Anfangsbedingungen

$d(t) = C_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

C_2, φ_2: Anfangsbedingungen

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2+2\Delta\omega^2}$

ω_0, ω_2: Eigenfrequenz, Normalfrequenzen

X: Bewegung der Massen in Phase

d: —"— gegenphasig

Die allg. Lösung für x_1, x_2 ist eine Superposition/lineare Überlagerung der beiden Normalschwingungen.

$X = x_1+x_2$, $d = x_1-x_2$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = \frac{X+d}{2}$; $x_2 = \frac{X-d}{2}$

Vektorschreibweise

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} = \frac{C_1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cos(\omega_0 t+\varphi_1) + \frac{C_2}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

Anfangsbedingungen bei $t=0$ für $\varphi_1=\varphi_2=0$

$C_1=C_2=C$

$$\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix} = \frac{C}{2}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}C\\0\end{pmatrix}$$

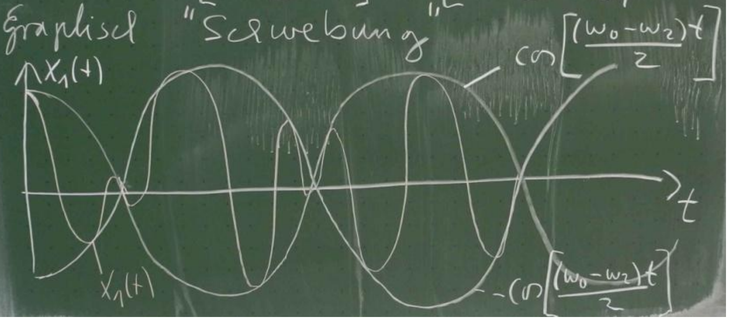
$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(0)\\\dot{x}_2(0)\end{pmatrix} = \frac{C}{2}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\omega_0(-\sin 0)+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\omega_2(-\sin 0)\right\} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{C}{2} \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t + \cos\omega_2 t \\ \cos\omega_0 t - \cos\omega_2 t \end{pmatrix}$$

Bronstein

$$= C \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{(\omega_0+\omega_2)t}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{(\omega_0-\omega_2)t}{2}\right] \\ -\sin\left[\frac{(\omega_0+\omega_2)t}{2}\right] \cdot \sin\left[\frac{(\omega_0-\omega_2)t}{2}\right] \end{pmatrix}$$

graphisch "Schwebung"



Allgemeiner Fall: N gekoppelte Punktmassen

Bewegung 1-dim.

2N Anfangsbedingungen $x_i(0), \dot{x}_i(0)$ für $i = 1, \dots, N$

für N Massen m_i

[Vorsicht, leicht geänderte Notation der k_{ij} gegenüber vorherigem Beispiel]

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_{11} x_1 - k_{12} x_2 \dots - k_{1N} x_N$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_{21} x_1 - k_{22} x_2 \dots - k_{2N} x_N$$

$$\vdots$$

$$m_N \ddot{x}_N = -k_{N1} x_1 - k_{N2} x_2 \dots - k_{NN} x_N$$

$$\Rightarrow m_i \ddot{x}_i = -\sum_{j=1}^{N} k_{ij} x_j$$

$$k_{ij} = k_{ji}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_i = -\sum_{j=1}^{N} \frac{k_{ij}}{m_i} x_j = -\sum_{j=1}^{N} M_{ij} x_j \quad \text{mit } M_{ij} = \frac{k_{ij}}{m_i} \neq M_{ji} = \frac{k_{ij}}{m_j}$$

Gesucht: Eigenmoden x_i mit $x_i = A e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \dot{x}_i = (i\omega) A e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}_i = -\omega^2 A e^{i\omega t} = -\omega^2 x_i$$

$$\Rightarrow -\omega^2 x_i + \sum_{j=1}^{N} M_{ij} x_j = 0$$

Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} (M_{ij} - \omega^2 \delta_{ij}) x_j = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, N$$

In Matrixschreibweise

$$(M - \omega^2 \mathbb{1}_N) \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}}_{\vec{A}} e^{i\omega t} = 0$$

Komponentenschreibweise von

$$\mathbb{1}_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{N\text{-Spalten}} \Big\} N \text{ Zeilen}$$

Existenz der Lösung erfordert $\det(M - \omega^2 \mathbb{1}_N) = 0$

$\to$ Polynom N.ten Grades $\to$

ergibt N Eigenfrequenzen ω_α^2 ; $\alpha = 1, \dots, N$

"Eigenwertproblem" Finde zu jedem ω_α den Eigenvektor $\vec{A}_\alpha$ "Amplituden"

$$(M - \omega_\alpha^2 \mathbb{1}_N)\vec{A}_\alpha = 0$$

Vorheriges Beispiel mit $N=2$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{12}}{m_1} & -\frac{k_{12}}{m_1} \\ -\frac{k_{12}}{m_2} & \frac{k_{22}}{m_2} + \frac{k_{12}}{m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \Delta\omega^2 & -\Delta\omega^2 \\ -\Delta\omega^2 & \omega_0^2 + \Delta\omega^2 \end{pmatrix} \quad {*)}$$

$$\det\begin{pmatrix} \omega_0^2 + \Delta\omega^2 - \omega^2 & -\Delta\omega^2 \\ -\Delta\omega^2 & \omega_0^2 + \Delta\omega^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = (\omega_0^2 + \Delta\omega^2 - \omega^2)^2 - \Delta\omega^4 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \quad \vee \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\Delta\omega^2 = \omega_2^2$$

Eigenvektoren

z. B. für $\omega^2 = \omega_0^2$

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 + \Delta\omega^2 - \omega_0^2 & -\Delta\omega^2 \\ -\Delta\omega^2 & \omega_0^2 + \Delta\omega^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\omega^2 & -\Delta\omega^2 \\ -\Delta\omega^2 & \Delta\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$A_1 = -A_2$ $\quad$ $\vec{A}$ zu $\omega^2 = \omega_0^2$ $\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$

für $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\Delta\omega^2$

$$\begin{pmatrix} -\Delta\omega^2 & -\Delta\omega^2 \\ -\Delta\omega^2 & -\Delta\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow B_1 = B_2 \quad \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

*) ab hier: Vorzeichenfehler bei den Nichtdiagonalelementen korrigiert