8. Übungsblatt zur Physik I

Prof. Dr. G. Hiller, Prof. Dr. S. Khan

Abgabe: Bis Dienstag, den 5. Dezember 2017 12:00 Uhr WS 2017/18

Aufgabe 1 : Little Green Men (5 Punkte)

Der Krebsnebel im Sternbild Stier ist der Überrest einer Supernovaexplosion, die (nach der Expansion des Nebels zu urteilen) vor ca. 900 Jahren stattgefunden haben muss. Tatsächlich berichten Quellen aus China, Arabien und Europa von der Beobachtung eines "sehr hellen Sterns" im Jahr 1054. Im Zentrum des Nebels wurde 1969 ein Pulsar entdeckt, der regelmäßig mit einer Periode von $T = 0,0331$ s Radiopulse emittiert. Derart regelmäßige Radioquellen schrieb man anfangs fremden Zivilisationen zu und katalogisierte sie mit dem Kürzel LGM ("Little Green Men", da Außerirdische bekanntlich klein und grün sind). Inzwischen glaubt man eher, dass es sich um schnell rotierende Himmelskörper handelt.

(a) Wie groß kann der Radius des Himmelskörpers sein, ohne dass die Umfangsgeschwindigkeit bei der angegebenen Periode die Lichtgeschwindigkeit erreicht?

(b) Wie groß kann der Radius des Himmelskörpers sein, ohne dass sich Teile von seiner Oberfläche ablösen
(vermutete Masse: 1,4 Sonnenmassen; Sonnenmasse $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg)?

(c) Da nach der Explosion des Himmelskörpers keine Kernprozesse mehr stattfinden, wird seine Rotation als Energiequelle für die Abstrahlung der Radiopulse und das Leuchten des Nebels vermutet. Es wird beobachtet, dass T pro Jahr um $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ s zunimmt. Schreiben Sie die Rotationsenergie als Funktion von $T(t)$. Durch Ableiten nach t (Kettenregel beachten!) erhalten Sie die Energieänderung als Funktion der Änderung $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ der Periode. Die Strahlungsleistung des Nebels lässt sich zu $5 \cdot 10^{31}$ W abschätzen. Betrachten Sie den Himmelskörper als homogene Kugel mit der oben angegebenen Masse und berechnen Sie seinen Radius (Zur Kontrolle: 10,8 km).

(d) Ist es vorstellbar, dass ein Himmelskörper so schnell rotiert? Immerhin braucht die Sonne 25,4 Tage für eine Umdrehung (an ihrem Äquator; in höheren Breiten rotiert sie noch langsamer). Wie schnell würde sie rotieren, wenn sie von ihrer jetzigen Größe (Radius $7 \cdot 10^8$ m) auf den in (c) berechneten Radius schrumpfen würde?

(e) Vergleichen Sie die Dichte, die sich durch die Masse aus (b) und den Radius aus (c) ergibt, mit der typischen Dichte von Kernmaterie (ein Neutron hat einen Radius von etwas unter 10^{-15} m und eine Masse von $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg). Was kann man daraus schließen?

bitte wenden

Aufgabe 2 : Erzeugung von Antiprotonen (5 Punkte)

Nach der speziellen Relativitätstheorie kann bei der Kollision von Teilchen Energie in Masse umgewandelt werden. Wie groß die Masse der neuen Teilchen sein kann, ergibt sich aus dem "relativistischen Energiesatz":

$$m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - c^2 \vec{p}^2} \tag{1}$$

Auf zwei kollidierende Teilchen angewandt ist E die Summe der Energien beider Teilchen (inklusive ihrer Ruheenergie!) und $\vec{p}$ ist die vektorielle Summe ihrer Impulse. Die Invariante $m_0 c^2$ ist vor und nach der Kollision gleich. Im Jahr 1955 wurden am Lawrence Berkeley Laboratory (USA) erstmals Antiprotonen ($\bar{\mathrm{p}}$) in der Reaktion $\mathrm{p}+\mathrm{p} \to \mathrm{p}+\mathrm{p}+\mathrm{p}+\bar{\mathrm{p}}$ erzeugt, wobei ein Protonenstrahl aus einem Beschleuniger auf ruhende Protonen traf. Protonen und Antiprotonen haben jeweils eine Ruhemasse von $m_p = 938$ MeV/c^2 (1 MeV $= 10^6$ eV, 1 eV $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ J ist eine Energieeinheit).

(a) Zeigen Sie zunächst, dass $\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$ ist, wobei $\beta = v/c$ die Geschwindigkeit geteilt durch die Lichtgeschwindigkeit und γ der Lorentzfaktor der beschleunigten Protonen ist.

(b) Wie groß ist, allgemein in m_p, β und γ ausgedrückt, die Gesamtenergie E und der Gesamtimpuls $\vec{p}$ vor der Kollision?

(c) Verwenden Sie (1) und ggf. den Ausdruck aus (a). Wie groß muss γ sein, damit die Ruheenergie nach der Reaktion für die Erzeugung von Antiprotonen ausreicht, also mindestens $4 m_p c^2$ beträgt?

(d) Wie groß muss die kinetische Energie der beschleunigten Protonen in eV sein?

Aufgabe 3 : Eigenwerte und -vektoren (5 Punkte)

Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren der folgenden Matrizen. Geben Sie auch jeweils eine Matrix S_i an, welche die Matrix M_i in eine Diagonalmatrix $\tilde{M}_i = S_i^{-1} M_i S_i$ transformiert.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 : Trägheitstensor (5 Punkte)

Berechnen Sie die Trägheitstensoren für Rotationen um den Schwerpunkt für

(a) eine diskrete Massenverteilung, bei der an den Eckpunkten eines Quaders (Seitenlängen a, b, c) sich jeweils ein Massepunkt der Masse m befindet.

(b) einen Zylinder (Höhe h, Radius R) der Gesamtmasse M mit kontinuierlicher homogener Massenverteilung.

(c) eine Kugel (Radius R) der Gesamtmasse M mit der kontinuierlichen Dichte $\rho \propto r^2$.

(d) eine infinitesimal dünne Kreisscheibe (Radius R) der Gesamtmasse M mit kontinuierlicher homogener Massenverteilung.