7. Übungsblatt zur Physik I

Prof. Dr. G. Hiller, Prof. Dr. S. Khan

Abgabe: Bis Dienstag, den 28. November 2017 12:00 Uhr WS 2017/18

Aufgabe 1 : Flummis (5 Punkte)

"Flummi" ist die Abkürzung für fliegendes Gummi und bezeichnet einen Gummiball. Das Wort wurde für die deutsche Synchronisation des Films *The Absent-Minded Professor* (USA 1961) erfunden. In der Vorlesung wurden zwei senkrecht aufeinander stehende Flummis fallen gelassen, wobei der obere eine Masse $m = 25$ g und der untere eine Masse $\alpha \cdot m = 103$ g hatte. Nach dem Aufprall auf dem Boden sprang der leichtere Flummi um ein Vielfaches höher als die Ausgangshöhe von $h_0 = 1,0$ m. Rechnen Sie zunächst allgemein und vernachlässigen Sie die Ausdehnung der Bälle.

(a) Überlegen Sie sich den Ablauf des Vorgangs und geben Sie die Geschwindigkeiten der Flummis kurz vor ihrem Stoß im Laborsystem und in ihrem Schwerpunktsystem an.

(b) Geben Sie die Geschwindigkeiten der Flummis kurz nach dem Stoß im Schwerpunktsystem und im Laborsystem an.

(c) Setzen sie nun Zahlen ein. Wie hoch fliegen die beiden Flummis?

Aufgabe 2 : Tyrannosaurus Rex (5 Punkte)

In Steven Spielbergs Film *Jurassic Park* (USA 1993) sagt John Hammond mit Stolz zu Dr. Alan Grant: "We clocked the T-rex at thirty-two miles an hour." (1 Meile $\approx$ 1,6 km).

(a) Ein Tier bewegt sich effizient, wenn die Beine wie Pendel schwingen. Wie schnell würde ein *Tyrannosaurus Rex* in dieser Gangart laufen, wenn seine Beine 3,5 m lang sind? Verwenden Sie zur Vereinfachung die Schwingungsdauer eines Fadenpendels. Das Verhältnis von Schritt- zu Beinlänge sei etwa 0,8 (wie beim Menschen). Ist es möglich, dass der T-Rex so schnell laufen konnte wie im Film behauptet?

(b) Führen Sie Berechungen für die folgende Filmszene durch: Ein T-Rex der Masse $m_T = 6000$ kg gerät mit der oben genannten Geschwindigkeit plötzlich auf einen gefrorenen See. Das verdutzte Tier rutscht ohne weitere Beinbewegungen 100 m weit über das Eis und verbeißt sich (rotationsfrei) in einen dort ruhenden *Carcharodontosaurus* der Masse $m_C = 5000$ kg. Nach welcher Strecke kommen beide gemeinsam zum Stillstand? Der typische Gleitreibungskoeffizient für Saurier auf Eisflächen beträgt $\mu_G = 0,02$.

Aufgabe 3 : Mathematische Grundlagen (5 Punkte)

Betrachten Sie zunächst die beiden Kraftfelder

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F}_2(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z^2 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{F}_i$ und die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_i$ der beiden Vektorfelder. Welches der beiden Felder ist konservativ?

(b) Für ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}$ gibt es ein Potential $f(\vec{r})$ mit

$$-\mathrm{grad}(f(\vec{r})) = -\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}). \tag{2}$$

Berechnen Sie das Potential für das konservative Feld aus Teil (a).

(c) Berechnen Sie zuletzt das Integral

$$\int_V (x^2 + y^2) dV \tag{3}$$

für die folgenden Volumen:

1. Einen Würfel mit $V = \{\vec{r}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1\}$.
2. Einen Zylinder mit $V = \{\vec{r}(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq z \leq 2; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$.
3. Eine Kugel mit $V = \{\vec{r}(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \phi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Hinweis: Wählen Sie geeignete Koordinaten und berücksichtigen Sie die Jacobi-Determinante.

Aufgabe 4 : Lorentz-Transformationen und Vierervektoren (5 Punkte)

Betrachten Sie zunächst ein System S', dass sich mit Geschwindigkeit v in z-Richtung gegenüber einem System S bewegt.

(a) Geben Sie die Lorentz-Transformation der Koordinaten, dass heisst t', x', y', z' in Abhängigkeit von t, x, y, z, an. Was ist der Unterschied zur Galilei-Transformation?

(b) Schreiben Sie die Koordinaten ct, x, y, z in einen Vektor $\vec{X}$. Die Transformation aus Teil (a) lässt sich dann mit der Matrix Λ schreiben als

$$\vec{X}' = \Lambda \vec{X} . \tag{4}$$

Geben Sie Λ für die Transformation aus Teil (a) an. Was ändert sich, wenn sich das System S' statt in z-Richtung in x- bzw. y-Richtung bewegt?

(c) In der Relativitätstheorie werden Zeit- und Ortskoordinaten eines Ereignisses im Minkowski-Raum in Vierervektoren geschrieben. Die kontravariante "Index oben" Darstellung des Orts-Vierervektors lautet dann

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)\,. \tag{5}$$

Mit dem metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{für } \mu = \nu = 0 \\ -1, & \text{für } \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{6}$$

ist die kovariante "Index unten" Darstellung des Orts-Vierervektors definiert als $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$. Beachten Sie dabei, dass die Einsteinsche Summenkonvention vom letzten Zettel verwendet wird. Schreiben Sie zunächst die Komponenten von x_μ explizit aus und berechnen Sie anschließend

$$x^2 = x_\mu x^\mu\,. \tag{7}$$

Welche Werte kann x^2 annehmen?

(d) Nehmen Sie die Transformationen aus Teil a) und zeigen Sie dass gilt

$$x^2 = x'^2\,. \tag{8}$$

Was bedeutet das insbesondere für den Ortsvektor eines Lichtstrahles?