

Nachbesprechung Übungsblatt 13

Aufgabe 1a)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_A \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{a} \xrightarrow{\text{hier}} E \cdot 2\pi \cdot R = -\pi \cdot R^2 \cdot \langle \dot{B} \rangle$$

$$-e \cdot E = \frac{1}{2} e \cdot R \cdot \langle \dot{B} \rangle$$

Aufgabe 1b)

$$F_Z = F_L \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = -e \cdot v \cdot B_R$$

$$m \cdot v = m_0 \gamma \cdot v = p = -e \cdot B_R \cdot R$$

Aufgabe 1c)

$$F_L = \dot{p} = -e \cdot \dot{B}_R \cdot R = \frac{1}{2} e \cdot R \cdot \langle \dot{B} \rangle$$

$$|\dot{B}_R| = \frac{1}{2} \langle \dot{B} \rangle \xrightarrow{\text{integriert}} |B_R| = \frac{1}{2} \langle B \rangle + B_0$$

sog. Wideröe-Bedingung

Aufgabe 1d)

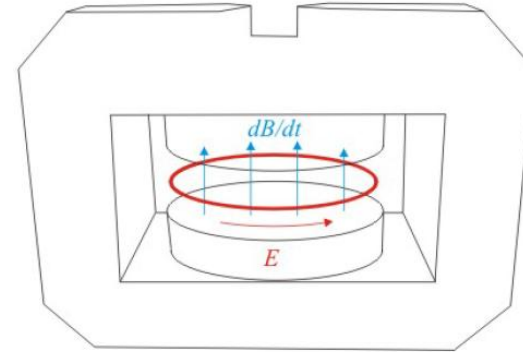
Endenergie W

$$v \approx c, \langle B(0) \rangle = 0 \quad W = \int_0^T \frac{1}{2} e \cdot R \langle \dot{B} \rangle \cdot c \cdot dt = \frac{1}{2} e \cdot R \cdot \langle B(T) \rangle \cdot c$$

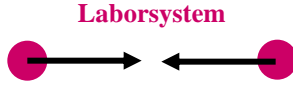

begrenzt durch max. B -Feld (Sättigung des Eisens) und Radius R . Eine Erhöhung der Anstiegsrate des Felds dB/dt hilft nicht, weil dadurch die Anstiegszeit T kürzer wird. Für Protonen ist $v \ll c$, d.h. weniger Umläufe während der begrenzten Anstiegszeit des Felds und damit weniger Energie



Rolf Wideröe
(1902 - 1996)



Übungsblatt 13

Gesamtenergie	E_1		$E_2 = E_1$		E'_1		mc^2
kin. Energie	T_1		$T_2 = T_1$		T'_1		0
Impuls	\vec{p}_1		$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$		\vec{p}'_1		0
Geschwindigkeit	\vec{v}_1		$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$		\vec{v}'_1		0

Aufgabe 2a)

Nicht-relativistisch:

$$v'_1 = 2v_1$$

→

$$T'_1 = 4T_1$$

$$P = \left(2 \frac{E_1}{c}, 0, 0, 0 \right)$$

$$P' = \left(\frac{E'_1}{c} + mc, p'_1, 0, 0 \right)$$

Aufgabe 2b)

Relativistisch: Viererimpulse in beiden Systemen

$$P^2 = P'^2 \quad 4 \frac{E_1^2}{c^2} = \left(\frac{E'_1}{c} + mc \right)^2 - p_1'^2 = \frac{E_1'^2}{c^2} + 2mE'_1 + m^2c^2 - \frac{E_1'^2}{c^2} + m^2c^2 = 2mE'_1 + 2m^2c^2$$

$$E'_1 = 2 \frac{E_1^2}{mc^2} - mc^2$$

$$T'_1 = E'_1 - mc^2 = \frac{2}{mc^2} (T_1^2 + 2T_1mc^2 + m^2c^4) - 2mc^2 = \frac{2}{mc^2} (T_1^2 + 2T_1mc^2)$$

$$T'_1 = 4T_1 \left(1 + \frac{T_1}{2mc^2} \right)$$

Gegenüber dem nicht-relativistischen Ergebnis gibt es also einen Zusatzgewinn an kinetischer Energie, wenn T_1 mit der Ruheenergie vergleichbar oder größer ist.

Übungsblatt 13

Aufgabe 3a)

$$F_Z = F_L \rightarrow$$

$$\frac{m_0 \gamma \cdot v_{\perp}^2}{R} = q \cdot v_{\perp} \cdot B \quad \frac{p_{\perp}}{R} = q \cdot B \quad p_{\perp} = q \cdot R \cdot B$$

$$\sin \theta = \frac{p_{\perp}}{p} \rightarrow p = \frac{p_{\perp}}{\sin \theta} = \frac{q \cdot R \cdot B}{\sin \theta} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,37 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ (J/C)s/m}^2}{0,866} = 1,266 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$1 \frac{\text{eV}}{c} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \text{ J}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \text{ C}} = 5,33 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow 1,266 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,375 \cdot 10^8 \frac{\text{eV}}{c} = 237,5 \frac{\text{MeV}}{c}$$

kürzer mit Faustformel

$$p[\text{GeV}/c] = 0,2998 \cdot B[\text{T}] \cdot R[\text{m}] \rightarrow p_{\perp} = 0,2055 \frac{\text{GeV}}{c} \quad \boxed{p = \frac{205,5 \text{ MeV}/c}{0,866} = 237,5 \frac{\text{MeV}}{c}}$$

Aufgabe 3b)

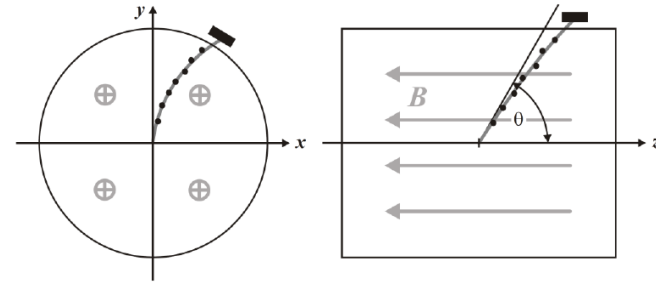
$$m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - p^2 c^2} = \sqrt{260^2 \text{ MeV}^2 - 237,5^2 \text{ MeV}^2} = \boxed{105,8 \text{ MeV}} \quad (\text{Myon } m_{\mu} = 105,7 \text{ MeV}/c^2)$$

$$p = m \cdot v = m_0 \cdot \gamma \cdot v \rightarrow v = \frac{p}{m_0 \cdot \gamma} \cdot c^2 = \frac{p \cdot c^2}{E} = \frac{237,5 \text{ MeV}/c}{260 \text{ MeV}} \cdot c^2 = \boxed{0,913 \cdot c}$$

Aufgabe 3c)

$$P_1 = \left(\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1 \right) \quad P_2 = \left(\frac{|\vec{p}_2|c}{c}, \vec{p}_2 \right) \quad P = \left(\frac{E_1}{c} + |\vec{p}_2|, \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \right) = \left(\frac{E_1}{c} + |p_1|, \vec{0} \right) \quad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

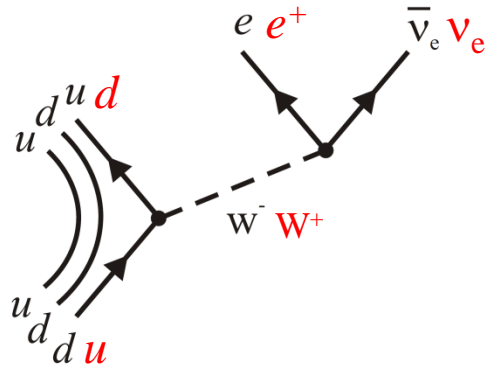
$$m_x = \frac{\sqrt{P \cdot P}}{c} = \frac{E_1}{c^2} + \frac{p_1}{c} = 260 \frac{\text{MeV}}{c^2} + 237,5 \frac{\text{MeV}}{c \cdot c} = \boxed{497,5 \frac{\text{MeV}}{c^2}} \quad (\text{Kaon } m_{K^{\pm}} = 493,7 \text{ MeV}/c^2)$$



Übungsblatt 13

Aufgabe 4a)

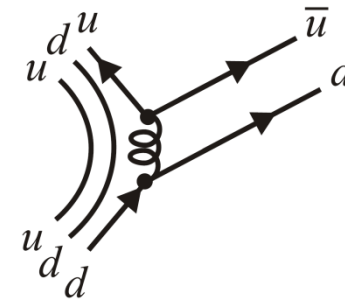
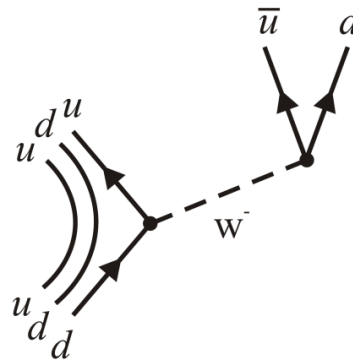
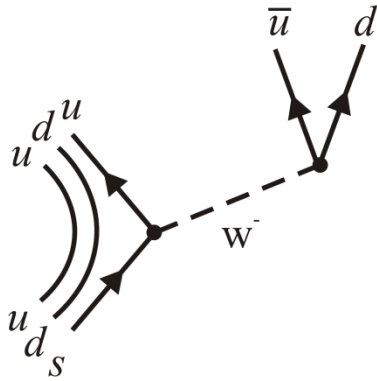
β^- -Zerfall
 β^+ -Zerfall



Aufgabe 4b)

Verletzung der Strangeness-Quantenzahl (Übergang von einer Quark-Familie in eine andere),
 d.h. auf jeden Fall schwache Wechselwirkung

im Gegensatz zu einem Übergang von Neutron nach Proton und Pion,
 bei dem starke und schwache Wechselwirkung möglich ist:



Wiederholung: Wellenfunktion

In Analogie zur elektromagnetischen Welle eingeführt: **Wellenfunktion**, Funktion von Ort und Zeit

Interpretation: Betragsquadrat $\cdot dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Intervall dx zu finden.

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \psi_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{Normierung} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\dots \psi_i^* \dots \right) \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \psi_i \\ \vdots \end{pmatrix} dx = 1$$

Operator: Rechenvorschrift, die man auf eine Wellenfunktion anwenden kann, zum Beispiel

$$\psi(x, t) = C_0 \cdot e^{i(k \cdot x - \omega t)} = C_0 \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(p_x \cdot x - E \cdot t)}$$

$$-i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = p_x \cdot \psi(x, t) \quad \text{Impulsoperator} \quad \hat{p} = -i \cdot \hbar \cdot \vec{\nabla} \quad \text{allgemein} \quad \hat{A} \psi = A \cdot \psi$$

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = E \cdot \psi(x, t) \quad \text{Energieoperator} \quad \hat{E} = i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}$$

In diesem Beispiel gibt es einen **Eigenwert**, wenn man den Operator auf die Wellenfunktion (ebene Welle) anwendet. D.h. statt der Anwendung des Operators kann man die Wellenfunktion mit einem Zahlenwert multiplizieren. Das ist aber keineswegs immer so.

Dagegen gibt es immer einen **Erwartungswert** als Mittelwert über viele Messungen, der so berechnet wird:

$$\langle A \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} \psi^* \cdot \hat{A} \cdot \psi \cdot dx \quad \text{Wenn es einen Eigenwert gibt, erhalt man} \quad \langle A \rangle = A \int_{x=-\infty}^{\infty} \psi^* \cdot \psi \cdot dx = A$$

Wenn es mehrere Eigenwerte gibt (Wellenfunktion ist Linearkombination aus Eigenfunktionen), ist der Erwartungswert ein Mittelwert aus Eigenwerten.

Wiederholung: Die Schrödinger-Gleichung

Nicht-relativistisch, zunächst ohne Potenzial:

$$\hbar \cdot \omega = \frac{(\hbar \cdot k)^2}{2m} \quad E = \frac{p^2}{2m} \quad \rightarrow \quad i \cdot \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$$

Mit Potenzial:

$$i \cdot \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x, t) \cdot \psi \quad \text{zeitabhängige Schrödinger-Gleichung}$$



Erwin Schrödinger
(1887 - 1961)

Dreidimensional:

$$i \cdot \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad \text{mit} \quad \hat{H} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \quad \text{Hamilton-Operator vgl. Hamilton-Funktion in der Mechanik = kin. Energie + pot. Energie}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Zeitunabhängiges Potenzial, Produktansatz:

$$V = V(x) \quad \rightarrow \quad \Psi(x, t) = \psi(x) \cdot \varphi(t)$$

$$i \cdot \hbar \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = E \cdot \varphi(t) \quad \rightarrow \quad \varphi(t) = e^{-i \cdot \omega \cdot t} = e^{-i \cdot \frac{E}{\hbar} \cdot t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x)$$

Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

Damit ist die Zeitabhängigkeit klar und man muss nur noch die räumliche Lösung der Schrödinger-Gleichung suchen (was schwer genug sein kann)

Wiederholung: Zeitunabhängige Lösungen der Schrödinger-Gleichung

Es gibt nur wenige Potentiale, für die eine Lösung der Schrödinger-Gleichung so einfach ist, dass sie in der Vorlesung bzw. in der Klausur auftauchen. Allerdings könnte eine kompliziertere Wellenfunktionen in einer Aufgabe gegeben sein, z.B. eine Wellenfunktion des Wasserstoffatoms.

Unendlich hoher 1-dimensionaler Potenzialtopf: Wellenfunktion verschwindet an den Rändern [eigentlich unphysikalisch, weil die Wellenfunktion keinen Knick haben (differenzierbar sein) sollte, aber als Grenzfall eines sehr hohen Potenzialtopfes ist das ok]. Es passen ganzzahlige Vielfache einer Halbwelle in den Kasten:

$$V(x) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad x < 0, x > a$$

Achtung: hier kommen keine cos-Funktionen vor, weil ein Rand des Kastens bei $x = 0$ ist. Das muss nicht immer so sein.

$$\psi(x) = A \cdot \sin(k \cdot x) \quad \text{mit} \quad \lambda_n = \frac{2a}{n} \quad k_n = n \frac{\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\Psi_n(x, t) = A_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} \quad \text{mit} \quad A_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot n^2$$

Energieeigenwerte steigen quadratisch mit n

Unendlich hoher 3-dimensionaler Potenzialtopf: Dasselbe Prinzip, nur mit drei unabhängigen Richtungen und damit drei Zahlen statt n . Verschiedene Kombinationen von n_x, n_y, n_z können zum selben Energieeigenwert führen (Entartung).

$$V(x, y, z) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b \quad 0 \leq z \leq c, \quad \text{sonst} \quad V(x, y, z) \rightarrow \infty$$

$$\psi(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a \cdot b \cdot c}} \cdot \sin\left(n_x \frac{\pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(n_y \frac{\pi}{b} y\right) \cdot \sin\left(n_z \frac{\pi}{c} z\right) \quad n_i = 1, 2, 3 \dots$$

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

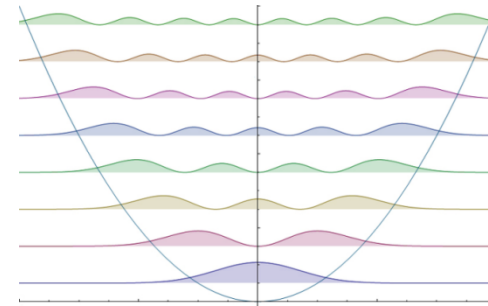
Endlich hoher 1- oder 3-dimensionaler Potenzialtopf: Wellenfunktion verschwindet nicht an den Rändern, sondern dringen exponentiell abfallend in die Wand des Potenzialtopfes ein (stetig und differenzierbar). Die Berechnung der Wellenfunktion ist schon hier nicht mehr ganz einfach (numerische oder grafische Lösung). Oft kann man für einfache Abschätzungen, z.B. Zustände im Potenzial von Atomkernen, zunächst einen unendlich hohen Potenzialtopf annehmen. Je tiefer der Zustand, desto besser diese Annahme.

Harmonischer Oszillator: Zwar im Prinzip unendlich hoch, aber die Wellenfunktion verschwindet nicht an den Rändern, sondern dringen exponentiell abfallend in die Wand des Potenzialtopfes ein (stetig und differenzierbar). Die Berechnung der Wellenfunktion auch hier nicht ganz einfach (Hermite'sche Polynome), aber die Energie-Eigenwerte sind um so einfacher, nämlich äquidistant:

$$E_n = (n + 1/2) \cdot \hbar \cdot \omega$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega = \sqrt{C/m} \quad V(x) = \frac{C}{2} x^2$$



Aus dem Vorfaktor C des Potenzials und der Masse m des Teilchens ergibt sich die Frequenz ω . Man beachte, dass die unterste Energie nicht bei 0 liegt.

Jedes muldenartige Potenzial, z.B. Bindung zwischen zwei Atomen, kann man in erster Näherung als Potenzial eines harmonischen Oszillators ansehen und damit sofort Energie-Eigenwerte angeben. Das entspricht einer Linearisierung der attraktiven Kraft, die das Potenzial darstellt, d.h. näherungsweise gilt das Hookesche Gesetz.

Coulomb-Potenzial: Das Potenzial der Form $-1/r$ ist aufgrund der elektrischen Anziehung von hoher praktischer Relevanz, z.B. Wasserstoffatom. Die Berechnung der Wellenfunktion erfolgt i.d.R. in Kugelkoordinaten und ist nicht einfach, aber es ergeben sich erstaunlich einfache Energie-Eigenwerte $\sim -1/n^2$.

$$E_n = -\frac{e^4 \mu}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -R \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

Hier explizit für das "wasserstoffartige" Atom mit Kernladung Z , wobei $R = 13,6 \text{ eV}$ die Rydberg-Konstante ist.

Kugelsymmetrische zeitunabhängige Potenzial: Die Abhängigkeit der Wellenfunktionen vom Polar- und Azimutalwinkel ist immer gleich (Kugelflächenfunktionen mit Quantenzahlen l, m), nur die Radialwellenfunktion hängt von der Form des Potenzials ab.

Potenzialstufen: Einfacher als Potenzialtöpfe sind Potenzialstufen (1 Rand) oder Potenzialbarrieren (2 Ränder), bei denen die Materiewelle nicht gebunden ist, sondern aus dem Unendlichen kommt. Das Gleiche gilt für Teilchen mit Energien über dem Rand eines endlich hohen Potenzialtopfes. Typische Aufgaben in diesem Kontext haben etwas mit dem Tunneleffekt zu tun.

Wellen im freien Raum oszillieren sin/cos-förmig, wobei die Frequenz oder Wellenzahl davon abhängt, wie hoch die Teilchenenergie über dem Potenzial ist:

$$\psi(x) = A \cdot e^{\pm i \cdot k \cdot x} \quad k = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \cdot (E - V)}$$

Wellen, die in eine Barriere eindringen, fallen exponentiell ab. Auch hier kommt es auf den Abstand zwischen Energie und Potenzial an:

$$\psi(x) = A \cdot e^{\pm \alpha \cdot x} \quad \alpha = \frac{|p|}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \cdot (V - E)}$$

Die Ausdrücke sind so gewählt, dass die relevanten Parameter k und α reell sind und V ist für einen gewissen Bereich konstant (Stufe oder kastenförmige Barriere). Der Übergang von oszillierender zu exponentiell abfallender Wellenfunktion am Rand einer Barriere muss stetig und differenzierbar sein.

Wenn V eine Funktion des Orts x ist, sind die Wellenfunktionen nicht mehr sin/cos-förmig oder exponentiell abfallend, sondern ihre Form ist komplizierter. Für langsam variierende Potentiale $V(x)$ kann man jedoch "so tun, als ob" die Funktionen noch durch reelle oder komplexe Exponentialfunktionen zu beschreiben sind, aber k und α sind Funktionen des Orts (WKB-Näherung). Ein typisches Beispiel ist der Tunneleffekt durch eine Barriere $V(x)$, z.B. zur Beschreibung des α -Zerfalls von Atomkernen:

$$\psi(x) \approx \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \cdot e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) \cdot dx}$$

Hier ist p der Impuls. Für die Transmissionswahrscheinlichkeit durch eine Barriere wird der Gamov-Faktor γ berechnet:

$$T = e^{-2\gamma} \quad \gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p(x)| \cdot dx = \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m \cdot (V(x) - E)} \cdot dx$$