

Spektrum des Schwarzen Körpers: Herleitung nach Planck und Einstein

Spektrale Energiedichte im Frequenzintervall ν bis $\nu+d\nu$

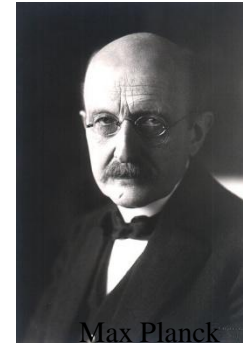
= Spektrale Modendichte · mittlere Energie pro Mode

$$w(\nu, T) \cdot d\nu = \rho \cdot \bar{W} \cdot d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \cdot \bar{W} \cdot d\nu$$

Aus der kinetischen Gastheorie entlehnte Annahme:

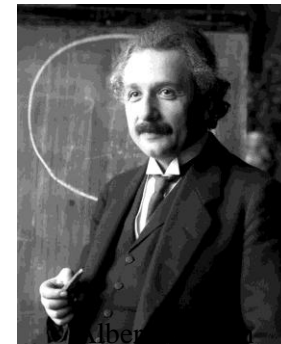
$$\bar{W} = k \cdot T \quad w(\nu, T) \cdot d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \cdot k \cdot T \cdot d\nu$$

Rayleigh-Jeans-Gesetz (steigt mit ν^2 und führt somit zur "Ultraviolett-Katastrophe").



Max Planck

1858-1947



Albert

1879-1955

Planck

Ausweg: Energie einer Mode ist ganzzahliges Vielfaches von **Energiequanten**, die proportional zur jeweiligen Frequenz sind (Proportionalitätsfaktor h ist das sog. Plancksche Wirkungsquantum):

$$W_\nu = n \cdot h \cdot \nu \quad n: \text{ganze Zahl}$$

Aber: Die Wahrscheinlichkeit soll mit der Energie (d.h. mit der Zahl der Quanten n) exponentiell abnehmen. Die mittlere Energie pro Mode ist dann

$$\bar{W} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot h \cdot \nu \cdot p = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot h \cdot \nu \cdot \frac{\exp(-n \cdot h \cdot \nu / k \cdot T)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n \cdot h \cdot \nu / k \cdot T)} = h \cdot \nu \cdot \frac{1}{\exp(h \cdot \nu / k \cdot T) - 1}$$

Der Zähler ist ein Boltzmann-Faktor wie in der kinetischen Gastheorie, der Nenner dient der Normierung (Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1). Herleitung des letzten Schritts s. nächste Seite.

Planck (Fortsetzung)

Setze $\alpha \equiv h \cdot \nu$ und $\beta \equiv \frac{1}{k \cdot T}$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \alpha \cdot \exp(-n \cdot \alpha \cdot \beta)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n \cdot \alpha \cdot \beta)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n \cdot \alpha \cdot \beta) \right\}}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n \cdot \alpha \cdot \beta)} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{1 - \exp(-\alpha \cdot \beta)} \right\} \cdot 1 - \exp(-\alpha \cdot \beta)$$

$$= \frac{\alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot \beta)}{1 - \exp(-\alpha \cdot \beta)} = \frac{\alpha}{\exp(\alpha \cdot \beta) - 1} \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \quad \text{für} \quad q = \exp(-\alpha \cdot \beta) < 1 \quad \begin{array}{l} \text{geometrische} \\ \text{Reihe} \end{array}$$

Damit $w(\nu, T) \cdot d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot \frac{h\nu^3}{\exp(h\nu/kT) - 1} \cdot d\nu$ **Plancksche Strahlungsformel**

Einstein $\frac{n_E}{n_0} = \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$ mit $E = h \cdot \nu$ Verhältnis von angeregten zu nicht angeregten Atomen

$$\gamma \cdot w(\nu, T) \cdot n_0 \cdot d\nu = \beta \cdot n_E + \gamma \cdot w(\nu, T) \cdot n_E \cdot d\nu$$

Absorptionen pro Zeit und Volumen = spontane Emissionen + stimulierte* Emissionen

$$w(\nu, T) \cdot d\nu = \frac{\beta}{\gamma} \frac{n_E}{n_0 - n_E} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{n_E/n_0}{1 - n_E/n_0} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\exp(-h\nu/kT)}{1 - \exp(-h\nu/kT)} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

$$\frac{\beta}{\gamma} \equiv \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \cdot d\nu \cdot h\nu$$

führt wieder zur Planckschen Strahlungsformel

* stimulierte Emission wurde hier ad hoc eingeführt, erweist sich später als Grundlage für das Verständnis des Laser

2.2 Der photoelektrische Effekt

Durch die Bestrahlung mit Licht (insbesondere UV) werden aus einer Metallplatte Elektronen herausgelöst. Quantitative Untersuchungen wurden von P. Lenard um 1900 durchgeführt. Davor gab es einige Hinweise z.B.:

- Becquerel-Effekt (Alexandre Becquerel 1839): Zwischen gleichartigen Elektroden in einem Elektrolyten entsteht eine Spannung, wenn sie belichtet werden.
- Hallwachs-Effekt (Wilhelm Hallwachs und Heinrich Hertz um 1886): Ein Elektrometer zeigt einen Ausschlag, wenn es belichtet wird.

$$E_{\max} = -e \cdot U_0 = h \cdot \nu - W_a$$

Die max. kinetische Energie der emittierten Elektronen wird durch die Gegenspannung U_0 bestimmt, bei der ein Stromfluss einsetzt. Sie ist gleich der Photonenenergie $h \cdot \nu$ minus der Austrittsarbeit W_a und unabhängig von der Lichtintensität.

Teilchencharakter von Licht

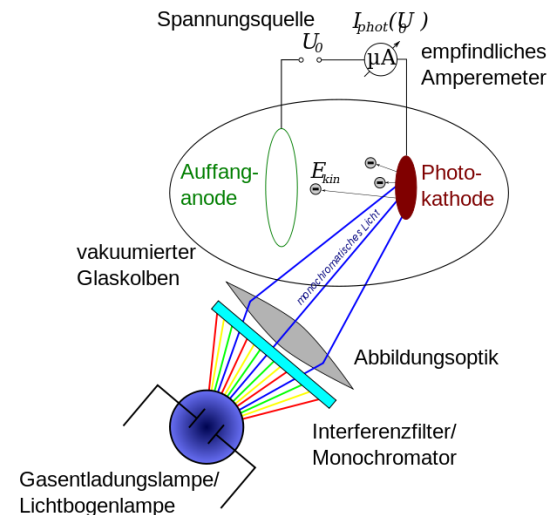
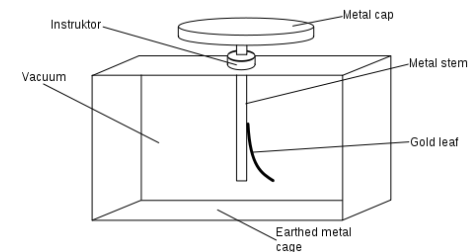
Eine Lichtwelle würde ihre Energie gleichmäßig auf alle Atome verteilen. Die Elektronenemission würde mit großer Verzögerung einsetzen (Stunden!) und die kinetische Energie würde von der Lichtintensität abhängen. Trotzdem ist die Wellenvorstellung sehr erfolgreich (Beugung).

Welle-Teilchen-Dualismus

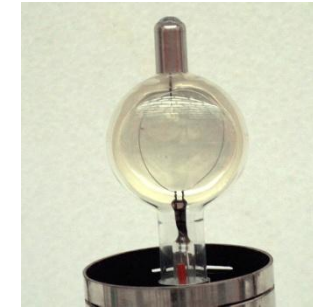
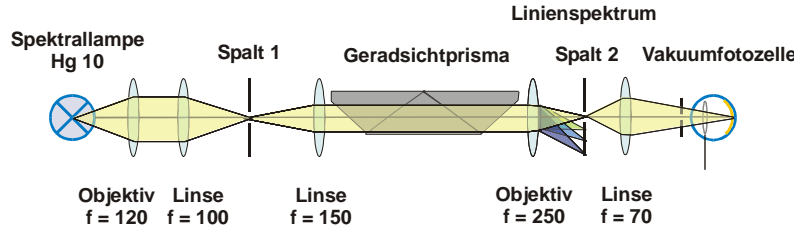
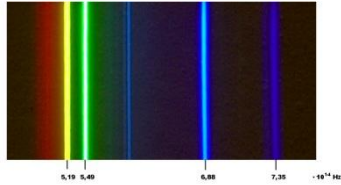
Licht hat **sowohl** Wellen- **als auch** Teilchencharakter, abhängig von der experimentellen Situation.



Phillip Lenard (1862 – 1947)

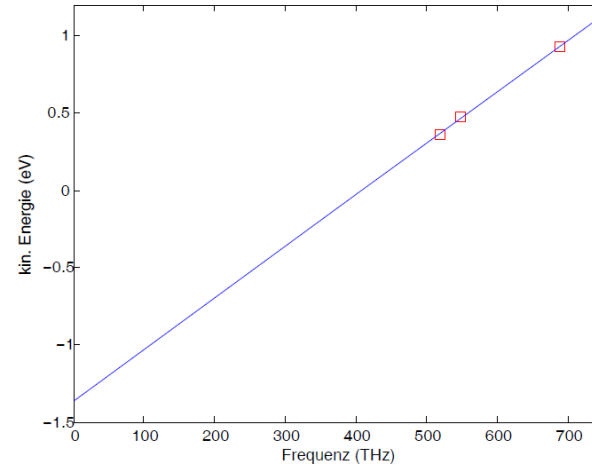


Experiment zum Photoeffekt



Eine Quecksilberdampf Lampe emittiert u.a. gelbes, grünes und blaues Licht, das auf eine Fozelle gelenkt wird: Die Kalium-Beschichtung (Austrittsarbeit 2,25 eV) des Glaskolbens dient als Photokathode, ein ringförmiger Draht als Anode. Gemessen wird eine Photostrom, der bei einer bestimmten Gegenspannung verschwindet. Diese Spannung entspricht der kinetischen Energie der Photoelektronen in eV. Messung:

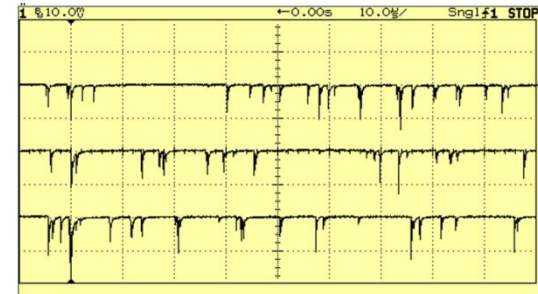
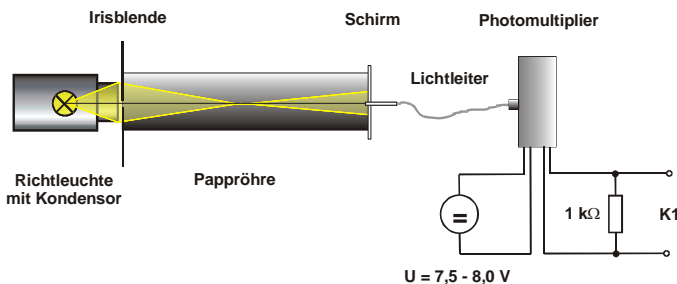
Farbe	Frequenz (Hz)	Photonenergie (eV)	Spannung (V)
gelb	$5,19 \cdot 10^{14}$	2,15	0,36
grün	$5,49 \cdot 10^{14}$	2,27	0,48
blau	$6,88 \cdot 10^{14}$	2,85	0,93



Die Steigung der Ausgleichsgeraden ergibt $h = 3,33 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$ (Literaturwert $4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$), der Punkt bei Frequenz 0 entspricht der Austrittsarbeit $W_a = 1,36 \text{ eV}$ (Literaturwert 2,25 eV).

Nachweis einzelner Photonen

Mit einem Oszillografen werden Signale einzelner Photonen sichtbar, wenn die Lichtquelle abgeschwächt wird. Als Detektor dient ein sog. Photomultiplier (typ. Pulsdauer einige 10 ns).



Das Plancksche Wirkungsquantum

$$h = (6,626.069.57 \pm 0,000.000.29) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (\text{SI-Einheiten})$$

$$h = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} e = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \quad (\text{"natürliche" Einheiten})$$

$$E = h \cdot \nu = \frac{h}{2\pi} \omega = \hbar \cdot \omega \quad \text{Energie eines Photons (eines Lichtquants)}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6,582 \cdot 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s} \quad (\text{sprich: "h quer"})$$

Bestimmung

Historisch

- Anpassung der Strahlungsformel an das Spektrum eines schwarzen Körpers
- Steigung der Auftragung der kinetischen Energie von Photoelektronen als Funktion der Frequenz

Zurzeit genaueste Messung

- Watt-Waage:

gespannter Draht, Strom I im Magnetfeld B kompensiert Gewicht,

Draht wird durch das Magnetfeld bewegt, Bestimmung von B durch Induktionsspannung U ,

Messung von U mit sog. "Josephson-Effekt" (Tunnelstrom zwischen zwei Supraleitern),

Messung von I mit sog. "Quanten-Hall-Effekt" (Sprünge der Hall-Spannung bei tiefen Temperaturen),

in beide Effekte geht der Wert von h ein, der auf diese Weise bestimmt werden kann.