

Beschleunigerphysik Teil 2

Shaukat Khan, TU Dortmund, Sommersemester 2017

8. August 2017

Inhaltsverzeichnis

9	Synchrotronstrahlung	3
9.1	Strahlungseffekte	5
9.1.1	Energieverlust durch Synchrotronstrahlung	5
9.1.2	Strahlungsdesorption	5
9.1.3	Longitudinale und transversale Dämpfung	6
9.1.4	Horizontale Emittanz	7
9.1.5	Energiebreite und Teilchenpaketlänge	9
9.2	Elektromagnetische Strahlung aufgrund beschleunigter Ladungen	9
9.2.1	Qualitative Betrachtung	10
9.2.2	Retardierte Potenziale und Strahlungsterm des elektrischen Felds	11
9.2.3	Strahlungsspektrum einer beschleunigten Ladung	15
9.3	Synchrotronstrahlung in einem Dipolmagneten	16
9.3.1	Qualitative Betrachtung	16
9.3.2	Wellenlängenschieber	19
9.3.3	Winkelverteilung und abgestrahlte Leistung aus Dipolmagneten	20
9.4	Wiggler und Undulatoren	22
9.4.1	Bauformen	23
9.4.2	Elektronenbahn im Magnetfeld eines Wigglers bzw. Undulators	24
9.4.3	Wiggler- und Undulatorstrahlung	26
10	Erzeugung ultrakurzer Strahlungspulse	29
10.1	Kurze Pulse durch Verkürzung der Elektronenpakete	30
10.2	Kurze Pulse durch longitudinal-transversale Korrelation	31
10.3	Laser-basierte Methoden zur Erzeugung kurzer Pulse	31
10.3.1	Femtosing	32
10.3.2	Dichtemodulation und kohärente Emission	32
10.3.3	Kohärente Emission von Terahertz-Strahlung	34
11	Freie-Elektronen Laser	35
11.1	Einleitung	35
11.2	Wechselwirkung zwischen Licht und Elektronen – der Low-Gain-FEL	36
11.3	Low-gain-FELs	40
11.4	Der High-Gain-FEL	40
11.4.1	SASE (self-amplified spontaneous emission) und FEL-Seeding	42
11.4.2	Technische Aspekte von High-Gain-FELs	45
11.5	„Energy-recovery“-Linearbeschleuniger	46

9 Synchrotronstrahlung

Synchrotronstrahlung bewirkt bei Elektronenbeschleunigern und -speicherringen unerwünschte Energieverluste. Andererseits hat sich diese Form kurzwelliger elektromagnetischer Strahlung als hervorragendes Werkzeug in der Physik, Biologie, Medizin, Materialforschung etc. bewährt [1, 2, 3]. Zu ihren positiven Eigenschaften gehören hohe Leistung, geringe Quellgröße und Divergenz, durchstimmbares Spektrum, variable Polarisation, gepulste Zeitstruktur, Stabilität und Berechenbarkeit (Eignung als Eichnormal). Weniger günstig z.B. im Vergleich zu heutigen Lasern ist die geringe Kohärenz und relativ große Pulsdauer.

Das Gleichgewicht von Aufheizungs- und Dämpfungseffekten, beide aufgrund der Synchrotronstrahlung, bestimmt sowohl die transversale (insbesondere die horizontale) Strahlgröße eines Elektronenstrahls in einem Speicherring als auch die Energieunschärfe. Aus der Energieunschärfe ergibt sich mit anderen Eigenschaften des Speicherrings die Länge der Elektronenpakete und damit die Dauer der Synchrotronstrahlungspulse.

Synchrotronstrahlungsquellen bilden aufgrund der hohen Zahl existierender oder geplanter Anlagen sowie ihrer weitgefächerten wissenschaftlichen Anwendungen eine wichtige Klasse von Elektronenspeicherringen. Die folgende historische Einteilung hat sich etabliert:

- 1. Generation: parasitäre Nutzung der Synchrotronstrahlung an Elektronenspeicherringen für die Kern- und Elementarteilchenphysik, z.B. bei DESY in Hamburg.
- 2. Generation: Elektronenspeicherringe kleiner Emittanz, die ausschließlich zur Produktion von Strahlung gebaut und betrieben wurden. Der erste Speicherring dieser Art war Tantalus an der University of Wisconsin (Madison/USA) im Jahr 1968 [4].
- 3. Generation: Elektronen- oder Positronenspeicherringe mit noch kleinerer Emittanz und möglichst vielen geraden Strecken zur Aufnahme von Wiggler und Undulatoren (s. weiter unten). Erste Anlagen dieser Art entstanden in den 1990er Jahren z.B. ESRF (Grenoble/Frankreich), ALS (Berkeley/USA), SPring8 (Hyogo/Japan) und viele andere.
- 4. Generation: Diese Kategorie beinhaltet sowohl „ultimative“ Speicherringe mit großem Umfang und noch kleinerer Emittanz, Linearbeschleuniger mit Freie-Elektronen-Lasern sowie Strahlungsquellen mit sog. *energy-recovery*-Linearbeschleunigern.

Eine wesentliche Kenngröße von Synchrotronstrahlungsquellen ist die sogenannte Brillanz (*brilliance*, oder in amerikanischen Publikationen oft auch *brightness*):

$$B = \frac{\text{Zahl der Photonen pro Zeiteinheit (s)}}{\text{Quellgröße (in mm}^2) \cdot \text{Winkeldivergenz (in mrad}^2) \cdot \text{Energieintervall (0, 1\% bw)}}^{(200)}$$

wobei als Breite des Energieintervalls üblicherweise 0.1% der zentralen Energie des Intervalls gewählt wird (bw = *bandwidth*). Die stürmische Entwicklung der Spitzenbrillanz (d.h. der Brillanz im zeitlichen Maximum eines Strahlungspulses) von der Entdeckung der Röntgenstrahlung

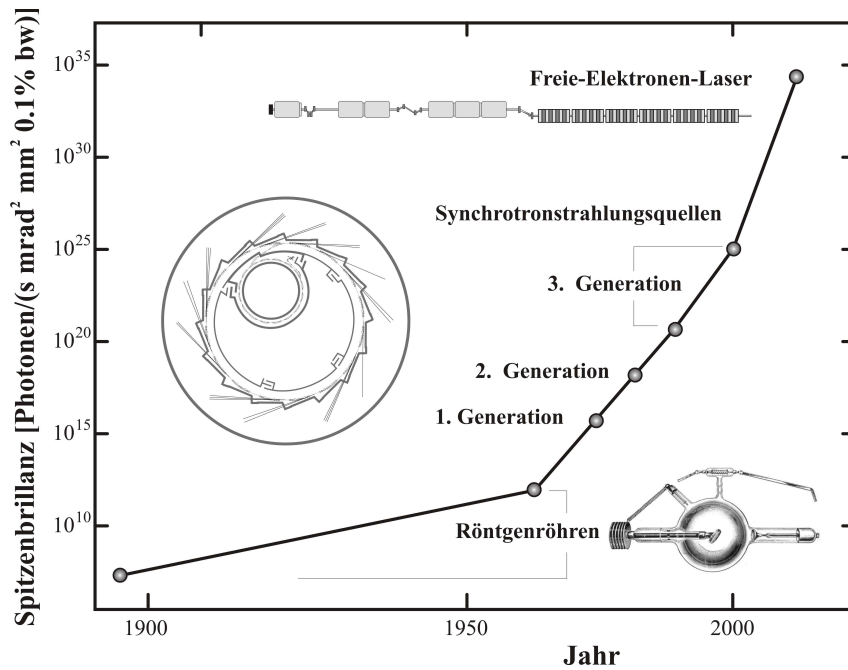


Abbildung 1: Spitzenbrillanz kurzwelliger Strahlung von 1895 (Entdeckung der Röntgenstrahlen) bis heute. Schematisch dargestellt ist eine Röntgenröhre, eine Synchrotronstrahlungsquelle und ein Freie-Elektronen-Laser.

über die Synchrotronstrahlungsquellen bis zu den ersten Freie-Elektronen-Lasern ist in Abb. 1 dargestellt.

Neben der Verwendung von Synchrotronstrahlung für materialwissenschaftliche Experimente gibt es eine Reihe von Effekten, in denen sich Elektronenspeicherringe aufgrund der Strahlungsemission von Hadronen-Maschinen, unterscheiden. Im Folgenden sollen diese Effekte – die teils vorteilhaft, teils nachteilig sind – vorgestellt werden. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird die Strahlung einer beschleunigten Ladung mit „retardierten“ Potenzialen quantitativ behandelt. Im dritten und vierten Abschnitt wird die Theorie auf beschleunigte Elektronen in Dipolmagneten und Undulatoren angewandt. Jeder Abschnitt beginnt mit qualitativen Betrachtungen und Abschätzungen. Abschließend wird ein Überblick über die derzeit existierenden Synchrotronstrahlungsquellen und die typischen Anwendungen gegeben.

9.1 Strahlungseffekte

9.1.1 Energieverlust durch Synchrotronstrahlung

Wenn ein Elektron mit Ruhemasse m und Energie E in einem magnetischen Feld B eine Kreisbeschleunigung mit Biegeradius ρ erfährt, so ist die abgestrahlte Leistung

$$P_s = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0(mc^2)^4} \frac{E^4}{\rho^2} = \frac{e^4 c^3}{6\pi\epsilon_0(mc^2)^4} E^2 B^2, \quad (201)$$

wobei $1/\rho = ecB/E$ aus der Gleichsetzung von Zentripetal- und Lorentzkraft verwendet wurde. Dieser Ausdruck ergibt sich aus der klassischen Elektrodynamik und wird weiter unten motiviert. Über die Umlaufzeit T_0 in einem Speicherring integriert ist der Energieverlust eines Elektrons

$$\Delta E = T_0 P_s = \frac{2\pi\rho}{c} P_s = \frac{e^2}{3\epsilon_0(mc^2)^4} \frac{E^4}{\rho} \quad \text{oder} \quad \Delta E [\text{keV}] = 88.5 \cdot \frac{E^4 [\text{GeV}^4]}{\rho [\text{m}]}. \quad (202)$$

Die starke Abhängigkeit von der Teilchenmasse zeigt, dass Synchrotronstrahlung i.d.R. nur für Elektronen relevant ist. Aufgrund der starken Abhängigkeit von der Elektronenenergie kann man mit e^+e^- -Kollisionsmaschinen über die bei LEP/CERN erreichten 100 GeV nicht mit vertretbarem Aufwand hinauszugehen. Bei LEP, in dessen Tunnel sich nun der LHC befindet, betrug der Biegeradius in den Magneten bereits 3000 m. Um Lepton-Antilepton-Kollisionen bei noch höherer Energie durchzuführen, werden zurzeit sowohl $\mu^+\mu^-$ -Collider (207-fach höhere Ruhemasse) als auch lineare Collider (ILC [5] oder CLIC [6]) diskutiert – jeweils extrem aufwändige Projekte.

In einem Elektronenspeicherring muss die bei jedem Umlauf durch Synchrotronstrahlung verlorene Energie mit Hf-Resonatoren wieder zugeführt werden, was nur in einer bestimmten Hf-Phase möglich ist (s. Abschnitt 4.4). Daher sind gespeicherte Elektronenstrahlen stets gepulst. Eine typische Hf-Frequenz ist 500 MHz, d.h. der minimale Abstand der Elektronenpakete beträgt 60 cm, was einem zeitlichen Abstand von 2 ns entspricht. Wenn man dagegen in einem Hadronenspeicherring die Hf-Sender ausschaltet, geht der Strahl nicht verloren, sondern verteilt sich gleichmäßig entlang des Umfangs (*coasting beam*).

9.1.2 Strahlungsdesorption

Synchrotronstrahlung wirkt sich nachteilig auf das Vakuum in einem Speicherring aus. Neben der thermischen Desorption (Ablösung von Atomen und Molekülen von der Oberfläche) erzeugt die Strahlung beim Auftreffen auf die Kammerwand Photoelektronen (10^{-1} - 10^{-2} Elektronen/Photon), die wiederum Atome von der Oberfläche ablösen (10^{-3} - 10^{-6} Atome/Elektronen) und zu einem merklichen Druckanstieg führen [7]. Abbildung 2 zeigt ein Beispiel.

Andererseits reinigt der ständige Beschuss mit Photonen die Oberfläche („Strahlwaschen“), so dass das Vakuum mit zunehmender Dosis (Ampere Strahlstrom \times Stunden) besser wird

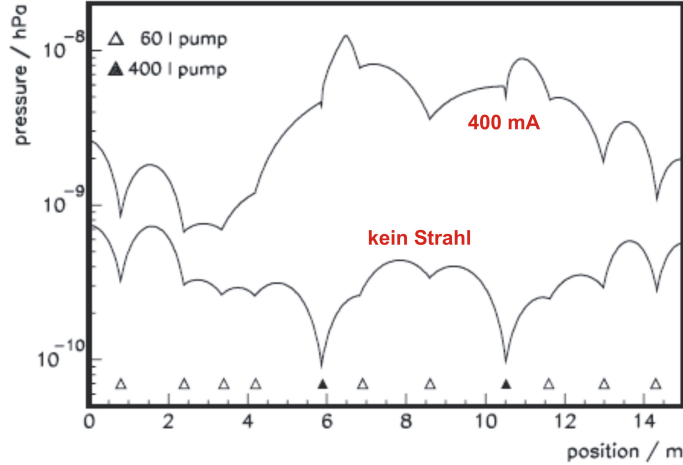


Abbildung 2: Numerische Simulation eines „Vakuumprofils“ (Druck als Funktion der Position in Strahlrichtung) mit und ohne Strahlungsdesorption. Berücksichtigt wurden die Kammerquerschnitte, die Positionen und druckabhängigen Saugleistungen der Vakuumpumpen (Dreiecke) sowie die Verteilung der auftretenden Synchrotronstrahlung. Die Druckmaxima bei 400 mA entstehen an den Strahlungsabsorbern, die auf die Dipolmagnete folgen.

und sich auch bei späterem Belüften der Vakuumkanmer schneller erholt als bei einer neuen Kammer.

9.1.3 Longitudinale und transversale Dämpfung

Die longitudinale Strahlungsdämpfung ergab sich in Abschnitt 4.4 aus der Tatsache, dass die pro Umlaufzeit T_0 abgestrahlte Energie W von der Elektronenenergie abhängt. Die Dämpfungskonstante ist

$$a_s = \frac{1}{2T_0} \frac{dW}{dE} = \frac{1}{2T_0} \int_0^{T_0} \frac{dP_s}{dE} dt = \frac{CB^2}{T_0} \int_0^{T_0} E dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{P_s}{E} dt = \frac{W}{T_0 E}, \quad (203)$$

wobei hier $P_s = CB^2 E^2$ und $W = \int P_s dt$ verwendet wurde.

Auch die transversale Betatron-Bewegung wird durch Synchrotronstrahlung gedämpft. Durch Emission eines Photons verliert ein transversal oszillierendes Elektron sowohl longitudinalen als auch transversalen Impuls, während die Hf-Resonatoren nur die longitudinale Komponente wiederherstellen, d.h. es geht ständig transversaler Impuls verloren. Die Berechnung der transversalen Dämpfungskonstanten (die erstaunlicherweise der longitudinalen sehr ähnlich sind) ist etwas umständlich. Das zusammenfassende Ergebnis ist [8]

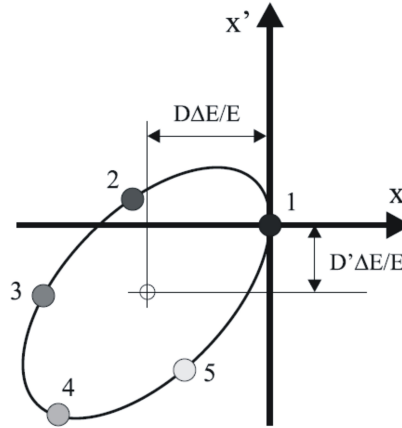


Abbildung 3: Wenn ein Elektron spontan seine Energie ändert (z.B. durch Emission von Strahlung oder Elektron-Elektron-Streuung), so verschiebt sich seine Sollbahn um $\delta x = D \cdot \Delta E/E$ und $\delta x' = D' \cdot \Delta E/E$. Da sich die Position des Elektrons im transversalen Phasenraum nicht geändert hat, befindet es sich nun auf einer Phasenraumellipse und führt eine Betatron-Oszillation um die Sollbahn aus (Bild: K. Wille).

$$a_x = (1 - \mathcal{D}) \cdot \frac{W}{2T_0 E} \quad a_y = 1 \cdot \frac{W}{2T_0 E} \quad a_s = (2 + \mathcal{D}) \cdot \frac{W}{2T_0 E} . \quad (204)$$

Der Korrekturterm \mathcal{D} berücksichtigt sowohl Synchrotronstrahlung aus Quadrupolen als auch die geänderte Abstrahlung in Dipolen auf einer Dispersionsbahn. Dieser Term ist bei modernen Maschinen oft vernachlässigbar, war aber z.B. bei den früheren *alternating-gradient*-Synchrotrons von Bedeutung. Die Tatsache, dass sich die Vorfaktoren (sog. *partition numbers*) stets zu 4 addieren, ist als „Robinson-Theorem“ bekannt. Die Dämpfungskonstanten sind Kehrwerte der jeweiligen 1/e-Dämpfungszeiten. Typische Werte liegen in der Größenordnung von 10 ms bzw. 10^4 Umläufen um einen Speicherring. Die Synchrotronstrahlungsdämpfung bewirkt, dass Störungen eines Elektronenstrahls (z.B. bei der Injektion) nach ca. 0,1 s keine Rolle mehr spielen, während die Störung eines Hadronenstrahls seine Qualität auf Dauer beeinflusst.

9.1.4 Horizontale Emittanz

Neben dem dämpfenden Effekt der Synchrotronstrahlung bewirkt die stochastische Natur der Emission von Photonen auch eine Anregung von longitudinalen und transversalen Schwingungen.

Der Mechanismus, der bei Strahlungsemission in einer dispersiven Strecke zu einer Oszillation in der horizontalen Ebene führt, ist in Abb. 3 skizziert, wobei die Amplitude für jedes Elektron individuell vom Energieverlust und der Dispersion abhängt. Das Gleichgewicht von Anregung und Dämpfung bestimmt die horizontale Emittanz, die allein durch die Strahloptik festgelegt ist. Sie beträgt

$$\varepsilon_x = C_\gamma \gamma^2 \frac{\langle \mathcal{H}(s)/R^3 \rangle}{J_x \langle 1/R^2 \rangle} \quad \text{mit} \quad C_\gamma \equiv \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} = 3,83 \cdot 10^{-13} \text{ m}, \quad (205)$$

wobei $J_x = 1 - \mathcal{D}$ ist (also i.d.R. ≈ 1) und

$$\mathcal{H}(s) \equiv \gamma(s)D^2(s) + 2\alpha(s)D(s)D'(s) + \beta(s)D'^2(s). \quad (206)$$

Der Index x der horizontalen optischen Funktionen wurde hier weggelassen und die Größen in eckigen Klammern müssen über alle Strecken mit endlichem Biegeradius R (also alle Dipole) gemittelt werden. Die vertikale Strahlemittanz ergibt sich aus Aufstellungs- und Feldfehlern der Magnete zu $\varepsilon_y = \kappa \varepsilon_x$, wobei die sog. Kopplung κ typischerweise in der Größenordnung von 0,01 liegt.

Aus der Abhängigkeit der Brillanz von der Strahlgröße $\sqrt{\varepsilon_{x,y}\beta_{x,y}(s)}$ und Divergenz $\sqrt{\varepsilon_{x,y}\gamma_{x,y}(s)}$ in Gl. 200 ist offensichtlich, dass die Strahlemittanz eine wichtige Kenngröße für Synchrotronstrahlungsquellen darstellt. Die horizontale Emittanz moderner Anlagen liegt im Bereich weniger nm rad.

Die Magnetstruktur einer Synchrotronstrahlungsquelle ist meist eine Abwandlung der achromatischen Chasman-Green-Struktur [9]. Bei gleichartigen Dipolmagneten genügt zur Berechnung von $\mathcal{H}(s)$ die Mittelung über einen Magneten, beginnend mit Dispersion $D(0) = 0$ am Anfang des Magneten, so dass

$$D(s) = R \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right) \approx \frac{s^2}{2R} \quad \text{und} \quad D'(s) = \sin \frac{s}{R} \approx \frac{s}{R} \quad (207)$$

gemäß Abschnitt 6.4 gilt. Für die optischen Funktionen wird der Dipol als Driftstrecke mit

$$\beta(s) = \beta(0) - 2\alpha(0)s - \gamma(0)s^2, \quad \alpha(s) = \alpha(0) - \gamma(0)s, \quad \text{und} \quad \gamma(s) = \gamma(0) \quad (208)$$

gemäß Abschnitt 6.6 angenommen. Damit ist

$$\mathcal{H} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\gamma(0)}{4} s^4 - \alpha(0)s^3 + \beta(0)s^2 \right) \quad (209)$$

und für die Gesamtlänge des Dipolmagneten L ergibt sich

$$\varepsilon_x = C_\gamma \gamma^2 \frac{1}{LR} \int_0^L \mathcal{H}(s) ds = C_\gamma \gamma^2 \left(\frac{L}{R} \right)^3 \left(\frac{\gamma(0)L}{20} - \frac{\alpha(0)}{4} + \frac{\beta(0)}{3L} \right). \quad (210)$$

Das wesentliche Ergebnis ist, dass die horizontale Emittanz stark vom Biegewinkel L/R des einzelnen Dipols und damit von der Anzahl der Dipole im Speicherring $2\pi R/L$ abhängt. Eine kleine Emittanz erreicht man also durch viele Dipolmagnete mit kleinem Biegewinkel. Da zwischen den Dipolen auch Quadrupol- und Sextupolmagnete erforderlich sind, steigt mit der Zahl der Dipole

auch der Umfang des Speicherrings. Tatsächlich besitzt die Synchrotronstrahlungsquelle PETRA III in Hamburg mit dem derzeit größten Umfang (2304 m) auch die kleinste Emittanz ($\varepsilon_x = 1$ nm rad), wobei allerdings sog. Dämpfungswiggler für zusätzliche Strahlungsemission sorgen.

Rein rechnerisch erreicht man die kleinste Emittanz mit den Anfangsbedingungen $\beta(0) = 1,55 \cdot L$ und $\alpha(0) = 3,87$, siehe z.B. [10], doch führt diese Bedingung zu einer sehr hohen Chromatizität, so dass in der Praxis andere Werte verwendet werden. Die daraus resultierende Emittanz ist nur geringfügig höher als der theoretische Minimalwert.

9.1.5 Energiebreite und Teilchenpaketlänge

Die zufällige Abstrahlung von Photonen unterschiedlicher Energie führt zu einer endlichen Energiebreite des gespeicherten Elektronenstrahls, deren Standardabweichung durch

$$\sigma_{\Delta E/E}^2 = C_\gamma \gamma^2 \frac{\langle 1/R^3 \rangle}{J_s \langle 1/R^2 \rangle} \quad (211)$$

mit C_γ wie oben und $J_s = 2 + \mathcal{D} \approx 2$ gegeben ist. Die Bewegung im longitudinalen Phasenraum entlang der Orts- bzw. Phasenkoordinate hängt vom *momentum compaction factor* α ab, die Bewegung entlang der Impuls- bzw. Energieachse hängt vom Gradienten der Hf-Spannung am synchronen Phasenwinkel ab, so dass mit der Energiebreite auch die Teilchenpaketlänge, ausgedrückt durch die Standardabweichung σ_z der longitudinalen Verteilung, festgelegt ist. Dies kann z.B. durch

$$\sigma_z = \frac{c \alpha}{\Omega_s} \sigma_{\Delta E/E} \quad (212)$$

ausgedrückt werden, wobei Ω_s die Kreisfrequenz der Synchrotron-Oszillation ist. Diese „natürliche“ Paketlänge liegt typischerweise in der Größenordnung von 10 mm und wird in Abhängigkeit von der Ladung des Teilchenpakets durch *potential-well distortion* und longitudinale Modenkopplung vergrößert.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Synchrotronstrahlung die longitudinalen und transversalen Dimensionen von Elektronenpaketen in einem Speicherring festlegt – in erster Linie durch Strahlenergie und Dipol-Biegeradien, aber auch in Abhängigkeit der optischen Funktionen –, während diese Größen in Linearbeschleunigern und Hadronenringen von den Anfangsbedingungen und späteren Störungen abhängen. Dies ist zunächst ein großer Vorteil von Elektronenspeicherringen, was die Stabilität von Strahlgröße, Energiebreite und Paketlänge betrifft, kann aber auch nachteilig sein, wenn man z.B. eine kleinere Strahlgröße anstrebt.

9.2 Elektromagnetische Strahlung aufgrund beschleunigter Ladungen

Elektromagnetische Strahlung entsteht, wenn Ladungen beschleunigt werden. Beispiele sind die oszillierende Bewegung von Elektronen in einem Hertzschen Dipol, die abrupte Abbremsung

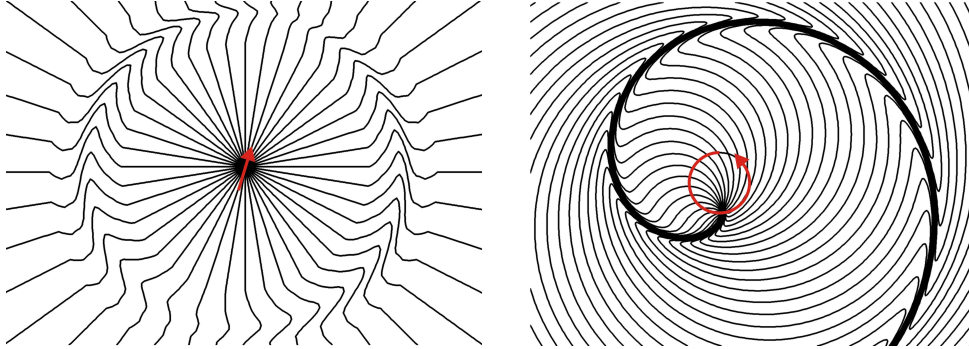


Abbildung 4: Momentaufnahmen einer Simulation elektrischer Feldlinien mit dem Programm `Radiation2D` von T. Shintake [11]. Links wurde eine Ladung kurzzeitig in Pfeilrichtung beschleunigt, rechts erfährt die Ladung eine ständige Kreisbeschleunigung. Die Störung, die aufgrund der Beschleunigung gegenüber den elektrostatischen Feld entsteht, heißt „elektromagnetische Welle“.

(negative Beschleunigung) von Elektronen in einer Röntgenröhre sowie die Kreisbeschleunigung von Elektronen in einem magnetischen Feld. In Abb. 4 sind die elektrischen Feldlinien einer Ladung dargestellt, links nach einer kurzzeitigen Beschleunigung, wobei sich eine „Schockwelle“ mit Lichtgeschwindigkeit radial ausbreitet. Im rechten Bild bewegt sich die Ladung auf einer Kreisbahn, so dass die Schockwelle ständig tangential zur Elektronenbahn entsteht und die Form einer Spirale hat.

9.2.1 Qualitative Betrachtung

Mit einer Betrachtung, die auf J.J. Thomson zurückgeht, kann das elektrische Feld und die Leistung einer elektromagnetischen Welle leicht plausibel gemacht werden (siehe z.B. [12]). Eine Ladung wird während eines kurzen Zeitintervalls Δt beschleunigt und ändert dabei seine Geschwindigkeit um Δv , so dass sich ein „Knick“ in den Feldlinien mit Lichtgeschwindigkeit c radial ausbreitet. Aus Abb. 5 lässt sich das Verhältnis der azimuthalen zur radialen Feldkomponente zur Zeit t nach dem Beschleunigungsvorgang ablesen

$$\frac{E_{\Theta}}{E_r} = \frac{\Delta v t \sin \Theta}{c \Delta t}, \quad (213)$$

wobei die radiale Komponente durch das Coulombsche Gesetz gegeben ist:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2}. \quad (214)$$

Damit ist die azimuthale Komponente, die erst durch die Beschleunigung entstanden ist, gegeben durch

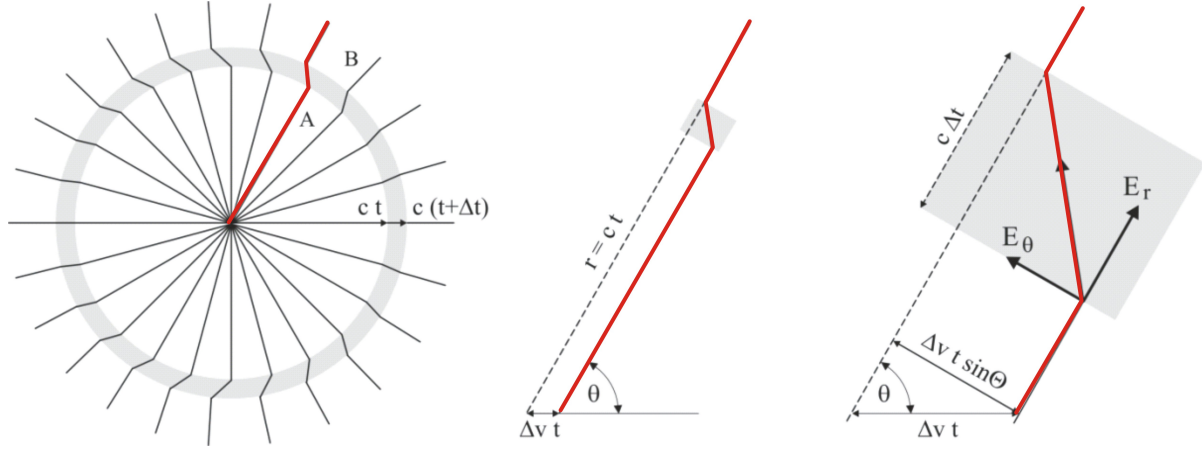


Abbildung 5: Schematische Darstellung der Beschleunigung einer Ladung im Zeitintervall Δt , wobei sich eine elektromagnetische Welle radial mit Geschwindigkeit c ausbreitet. In der Mitte und rechts ist eine elektrische Feldlinie herausgegriffen, um das Verhältnis von azimuthaler zu radialer Feldkomponente zu illustrieren (s. Text).

$$E_{\Theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e(\Delta v/\Delta t) \sin \Theta}{c^2 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \ddot{r} \sin \Theta}{c^2 r}. \quad (215)$$

Der Energiefluss durch den Raumwinkel $d\Omega$ ist durch den Betrag des Poynting-Vektors $|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = c\epsilon_0 |\vec{E}|^2$, multipliziert mit $r^2 d\Omega$ gegeben

$$\dot{W} d\Omega = c\epsilon_0 E_{\Theta}^2 r^2 d\Omega = \frac{e^2 \ddot{r}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \Theta d\Omega. \quad (216)$$

Hier erkennt man die typische Winkelverteilung $\sim \sin^2 \Theta$ eines Hertzschen Dipols. Über alle Winkel integriert ergibt sich die sog. Larmor-Formel

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{r}^2 \quad (217)$$

für die abgestrahlte Leistung.

9.2.2 Retardierte Potentiale und Strahlungsterm des elektrischen Felds

Allgemein wird das elektrische Feld einer beschleunigten Ladung mithilfe „retardierter Potentiale“ (Liénard-Wiechert-Potentiale) hergeleitet, siehe z.B. [13, 14, 15]. Das magnetische Feld lässt sich durch ein Vektorpotential gemäß $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ausdrücken. Damit ergibt sich aus dem Induktionsgesetz

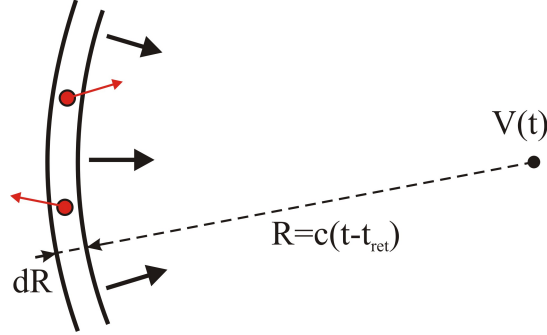


Abbildung 6: Die Ladungen, die zum Potenzial φ zur Zeit t beitragen, kann man sich in einer dünnen Kugelschale mit Radius $R = c(t - t_{\text{ret}})$ vorstellen, die mit zunehmender Zeit $t_{\text{ret}} < t$ zum Beobachtungspunkt kollabiert. Wenn man sich die Schalendicke dR als klein, aber endlich vorstellt, verbleibt eine Ladung, die sich in Richtung zum Beobachter bewegt, länger innerhalb der Schale und trägt mehr zum Potenzial bei als eine Ladung, die sich vom Beobachter wegbewegt.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}_{=-\nabla\varphi} = 0, \quad (218)$$

weil die Rotation des Gradienten eines Skalarfelds φ immer null ist. Das Minuszeichen entspricht der üblichen Konvention. Das elektrische Feld kann also durch ein Skalarpotenzial φ und das Vektorpotenzial \vec{A} beschrieben werden:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (219)$$

(Anmerkung: In das Gaußsche Gesetz mit der Ladungsdichte ρ eingesetzt ergibt sich

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \nabla \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{A} = -\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (220)$$

Im Fall der sog. Lorenz-Eichung ist der letzte Term gleich null und der erste Term entspricht einer Wellengleichung. Für ein zeitunabhängiges Potenzial ergibt sich daraus die Poisson-Gleichung.)

Im statischen Fall wäre das skalare Potenzial einfach durch die Ladungsdichte $\rho(\vec{R})$ gegeben, wobei \vec{R} ein Ortsvektor und r der Abstand zwischen Ladung und Beobachtungspunkt P sei. Im Fall einer Punktladung e ergibt sich integriert über alle Raumrichtungen

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{R})}{r} dx dy dz = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{r}. \quad (221)$$

Für eine bewegte Ladung ist ihr Zustand zur Zeit t der Messung am Ort des Beobachters nicht relevant, sondern vielmehr zu einem früheren Zeitpunkt $t' = t - r(t')/c$, an dem der Beitrag zum gemessenen Potenzial von der Ladung „emittiert“ wurde. Damit alle Beiträge zur selben Zeit t beim Beobachter ankommen, muss die „retardierte“ Zeit t' um so weiter in der Vergangenheit liegen, je weiter die Ladung vom Beobachter entfernt war. Wenn \vec{r} der Vektor von der Ladung zum Beobachter sei¹ und der Ortsvektor des Beobachtungspunkts $\vec{r}_p = \vec{R} + \vec{r}$ konstant ist, dann ist die „retardierte“ Geschwindigkeit der Ladung und ihr Betrag gegeben durch

$$\frac{d\vec{r}}{dt'} = -\frac{d\vec{R}}{dt'} = -c\vec{\beta}(t') \quad \text{und} \quad \frac{dr}{dt'} = -c\vec{n} \cdot \vec{\beta}(t'), \quad (222)$$

wobei das Skalarprodukt von $\vec{\beta}$ mit \vec{n} , dem Einheitsvektor von \vec{r} , berücksichtigt, dass eine Längenänderung von \vec{r} von der Richtung der beiden Vektoren abhängt. Damit ergibt sich eine Beziehung zwischen den Zeitskalen t und t'

$$dt = dt' + \frac{1}{c} \frac{dr}{dt'} dt' = dt' \left(1 + \frac{1}{c} \frac{dr}{dt'} \right) = dt' (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}), \quad (223)$$

so dass das Potenzial für die Punktladung e im Gegensatz zum statischen Fall

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{R}, t')}{r} dx' dy' dz' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{r(t') (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \Bigg|_{\text{ret}}. \quad (224)$$

ist. Der Zusatz „ret“ weist darauf hin, dass alle vorkommenden Größen zur retardierten Zeit betrachtet werden müssen. Man kann sich eine dünne Kugelschale vorstellen, die mit Lichtgeschwindigkeit zum Beobachtungspunkt P hin kollabiert und alle Ladungsanteile „aufammelt“, die zum Potenzial zu einem gegebenen Zeitpunkt t beitragen (s. Abb. 6). Wenn sich eine Ladung auf den Beobachter zubewegt, befindet sie sich etwas länger in der Kugelschale und liefert einen höheren Beitrag. Genau dies wird durch den Faktor $(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^{-1}$ berücksichtigt. Ein analoger Ausdruck existiert auch für das Vektorpotenzial

$$\vec{A}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{ec\vec{\beta}}{r(t') (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}(t'))} \Bigg|_{\text{ret}}. \quad (225)$$

Zur Berechnung des elektrischen Felds gehen diese „Liénard-Wiechert“-Potenziale nicht direkt in Gl. 219 ein, sondern als $\partial\vec{A}/\partial t$ und $\nabla\varphi$. Hier soll nur die zeitliche Ableitung des Vektorpotenzials

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{dt'}{dt} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t'} = \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \frac{\mu_0 ec}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\vec{\beta} \cdot \frac{1}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right). \quad (226)$$

¹In manchen Büchern ist \vec{r} entgegengesetzt definiert, also vom Beobachter zur Ladung, so dass Ausdrücke mit \vec{r} oder seinem Einheitsvektor \vec{n} ein entgegengesetztes Vorzeichen haben.

hergeleitet werden. Für die zeitliche Ableitung des Terms in Klammern nach der Produktregel wird

$$\frac{\partial}{\partial t'} (r - \vec{r} \cdot \vec{\beta}) = \frac{\partial r}{\partial t'} - \vec{\beta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} - \vec{r} \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t'} = -c \vec{n} \cdot \vec{\beta} + c \beta^2 - \vec{r} \cdot \dot{\vec{\beta}} \quad (227)$$

benötigt. Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \frac{\mu_0 e c}{4\pi} \left(\frac{\dot{\vec{\beta}}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} + \vec{\beta} \frac{c \vec{n} \cdot \vec{\beta} - c \beta^2 + \vec{r} \cdot \dot{\vec{\beta}}}{r^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \frac{\mu_0 e c}{4\pi} \left(\frac{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) \dot{\vec{\beta}}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} + \vec{\beta} \cdot \frac{c \vec{n} \cdot \vec{\beta} - c \beta^2 + r \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}}{r^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} \right). \end{aligned} \quad (228)$$

Im letzten Schritt werden die Terme zusammengefasst, die proportional zu $1/r^2$ und $1/r$ sind:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 e c}{4\pi} \left(\frac{c (\vec{n} \cdot \vec{\beta} - \beta^2) \vec{\beta}}{r^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) \dot{\vec{\beta}} + \{ \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \} \vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right). \quad (229)$$

Analog, aber noch etwas mühsamer, ergibt sich der Gradient des Skalarpotenzials

$$\nabla \varphi = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{(1 - \beta^2) \vec{n} - (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta}}{r^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{\{ \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \} \vec{n}}{c r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right), \quad (230)$$

der hier nicht hergeleitet werden soll. Beides in Gl. 219 eingesetzt, ergibt mit $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ den Ausdruck für das elektrische Feld am Ort P

$$\vec{E}(t) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{(1 - \beta^2) (\vec{n} - \vec{\beta})}{r^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{\vec{n} \times \{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \}}{c r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right) \Bigg|_{\text{ret}}. \quad (231)$$

wobei der zweite Term mit der „bac-cab“-Regel² so umgeordnet wurde, dass die in der Literatur übliche Schreibweise entsteht. Auch hier wird noch einmal darauf hingewiesen, dass auf der rechten Seite redardierte Größen stehen. Das magnetische Feld am Ort P ergibt sich aus der Rotation des Vektorpotenzials und erfüllt die Bedingung

² Gemeint ist die sog. Graßmann-Identität für drei Vektoren: $\vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

$$\vec{B}(t) = \left(\frac{\vec{n}_{\text{ret}} \times \vec{E}(t)}{c} \right). \quad (232)$$

Der erste Term des elektrischen Felds proportional zu $1/r^2$ ist das aus der Elektrostatik bekannte Coulomb-Feld. Bei hohen Geschwindigkeiten ist das Feld nicht mehr radial gleichmäßig verteilt, sondern konzentriert sich mit einem Öffnungswinkel von $\approx 1/\gamma$ senkrecht zur Bewegungsrichtung. Mit zunehmendem Abstand r dominiert der zweite Term, der proportional zu $1/r$ ist. Dieser sogenannte Strahlungsterm ist nur ungleich null, wenn die Ladung beschleunigt wird. Aus dem elektrischen Feld lässt sich wiederum die Strahlungsleistung ableiten, die mit der obigen Larmor-Formel konsistent ist.

9.2.3 Strahlungsspektrum einer beschleunigten Ladung

Das elektrische und magnetische Feld als Funktion einer Kreisfrequenz ω ergibt sich aus den Feldern als Funktion der Zeit durch Fourier-Transformation, z.B. für das elektrische Feld

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(t) e^{-i\omega(t'+r/c)} (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) dt' \quad (233)$$

mit dem Faktor, der sich aus dem Übergang von dt nach dt' ergibt. Im Folgenden ist nur der Strahlungsterm von Interesse, der für \vec{E} eingesetzt wird:

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{n} \times \{(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} \cdot e^{-i\omega(t'+r/c)} dt' \equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_p} \frac{dU}{dt'} \cdot V dt'. \quad (234)$$

Im letzten Schritt wurde die Näherung $r \approx r_p = \text{const.}$ eingeführt. Sie gilt, wenn der Abstand zwischen Ladung und Beobachtungspunkt P groß ist im Vergleich zur relevanten Bahn der Ladung. Wenn man z.B. bei einer Kreisbahn mit Radius ρ annimmt, dass die Abstrahlung in einem Kegel mit halbem Öffnungswinkel $1/\gamma$ erfolgt, dann gilt die Näherung für $r \gg 2\rho/\gamma$. Im Folgenden soll ferner $\vec{n} = \text{const.}$ angenommen werden, d.h. die Richtung des Vektors von der Ladung zu P ändert sich nicht wesentlich. Das Integral wird nun durch partielle Integration³ ausgeführt, wobei

$$U = \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \quad \text{und} \quad (235)$$

$$\frac{dV}{dt'} = -i\omega \frac{d}{dt'} (t' + r/c) \cdot e^{-i\omega(t'+r/c)} = -i\omega (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) \cdot e^{-i\omega(t'+r/c)}$$

³ Partielle Integration: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dt'} \cdot V dt' = U \cdot V|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} U \cdot \frac{dV}{dt'} dt'$.

ist. Der Ausdruck für u lässt sich durch Ableiten nach t' und Anwendung der bac-cab-Regel auf das Ergebnis sowie auf den obigen Ausdruck für du/dt' verifizieren. Nach Anwendung der partiellen Integration verschwindet der erste Term, da nur die irrelevanten Beiträge zu den Zeiten $t' = \pm\infty$ eingehen. Der zweite Term ist

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{i\omega e}{4\pi\sqrt{2\pi\varepsilon_0}cr_p} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) \right\} e^{-i\omega(t'+r/c)} dt' \quad (236)$$

Ein analoger Ausdruck kann für das magnetische Feld als Funktion von ω abgeleitet werden, wobei wieder

$$\tilde{B}(\omega) = \left(\frac{\vec{n}_{\text{ret}} \times \tilde{E}(\omega)}{c} \right) \quad (237)$$

gilt. Es mag auffallen, dass in Gl. 236 die Beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$ nicht explizit erscheint, obwohl es sich um den Fourier-transformierten Strahlungsterm handelt. Wenn aber die Geschwindigkeit konstant ist, ist auch der Vorfaktor des oszillierenden Terms konstant und das Integral verschwindet.

Die abgestrahlte Energie pro Raumwinkel und Frequenz ist dann (in der Näherung für große Abstände r) gegeben durch

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \varepsilon_0 cr^2 \left| \tilde{E}(\omega) \right|_{\text{ret}}^2 = \frac{q^2 \omega^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) \right] e^{-i\omega(t+r/c)} dt \right|_{\text{ret}}^2. \quad (238)$$

Eine numerische Integration des Ausdrucks in kleinen Zeitschritten dt entlang der Bahn einer beschleunigten Ladung liefert die abgestrahlte Energie an einem Beobachtungsort und für eine Frequenz ω . Wiederholt man die Rechnung für verschiedene Orte bzw. Frequenzwerte, erhält man die räumliche Verteilung bzw. das Spektrum der emittierten Strahlung.

9.3 Synchrotronstrahlung in einem Dipolmagneten

Zunächst wird die Synchrotronstrahlung aus einem Dipolmagneten mit konstantem Biegeradius betrachtet. Da es sich nicht um einen periodischen Vorgang handelt, ist das Spektrum breit. Einem Beobachter in der Elektronenstrahlebene erscheint die Elektronenbewegung linear, so dass auch die Strahlung linear polarisiert ist. Ein Beobachter oberhalb oder unterhalb dieser Ebene nimmt die Elektronenbahn als Teil einer Ellipse wahr, so dass die Strahlung einen zirkular polarisierten Anteil hat, der auch für materialwissenschaftliche Experimente genutzt werden kann.

9.3.1 Qualitative Betrachtung

Im Schwerpunktsystem der Elektronen besitzt die Synchrotronstrahlung die für einen Hertzschen Dipol typische toroidale Richtcharakteristik $\sim \sin^2 \Theta$ um den Vektor der Kreisbeschleunigung.

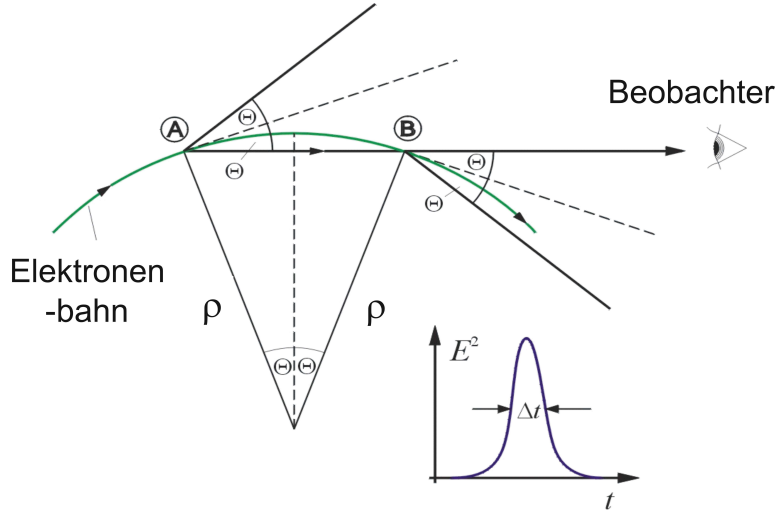


Abbildung 7: Abschätzung der Pulsdauer von Δt der von einem Elektron emittierten Synchrotronstrahlung, gegeben durch die Flugzeitdifferenz von Licht und Elektron zwischen den Punkten A und B (Bild: K. Wille).

nigung. Ins Laborsystem transformiert wird diese Verteilung sehr stark in Strahlrichtung verzerrt, so dass eine sehr schmale Strahlungskeule tangential zur Elektronenbahn entsteht. Der Öffnungswinkel kann abgeschätzt werden, indem man den Impuls eines “typischen“ Photons \vec{p}^* , das senkrecht zum Beschleunigungsvektor und senkrecht zur Flugrichtung der Elektronen emittiert wurde, ins Laborsystem transformiert:

$$p_{\perp} = |\vec{p}^*| \quad \text{und} \quad p_{\parallel} \approx \beta\gamma|\vec{p}^*| \quad \rightarrow \quad \Theta \approx \tan \Theta = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} \approx \frac{1}{\gamma}. \quad (239)$$

Obwohl die Winkelverteilung im Detail kompliziert ist und mit der Photonenergie variiert, kann für viele Zwecke $\Theta = 1/\gamma$ als halber Öffnungswinkel eines kegelförmigen Strahlungsfelds tangential zur Elektronenbahn angenommen werden.

Die “typische” Breite des Strahlungsspektrums kann aus der zeitlichen Dauer der tangential zu einer Kreisbahn mit Radius ρ wahrgenommenen Strahlung mit

$$\omega_{\text{typ}} \approx 2\pi/\Delta t. \quad (240)$$

abgeschätzt werden. Angenommen, ein Beobachter nimmt Photonen wahr, solange der zur Elektronenbahn tangential Strahlungskegel mit halbem Öffnungswinkel $1/\gamma$ seine Position überstreicht (Abbildung 7), dann entspricht die zeitliche Breite der Photonverteilung der Zeitverzögerung des Elektrons auf diesem Bahnstück gegenüber dem ersten ausgesandten Photon

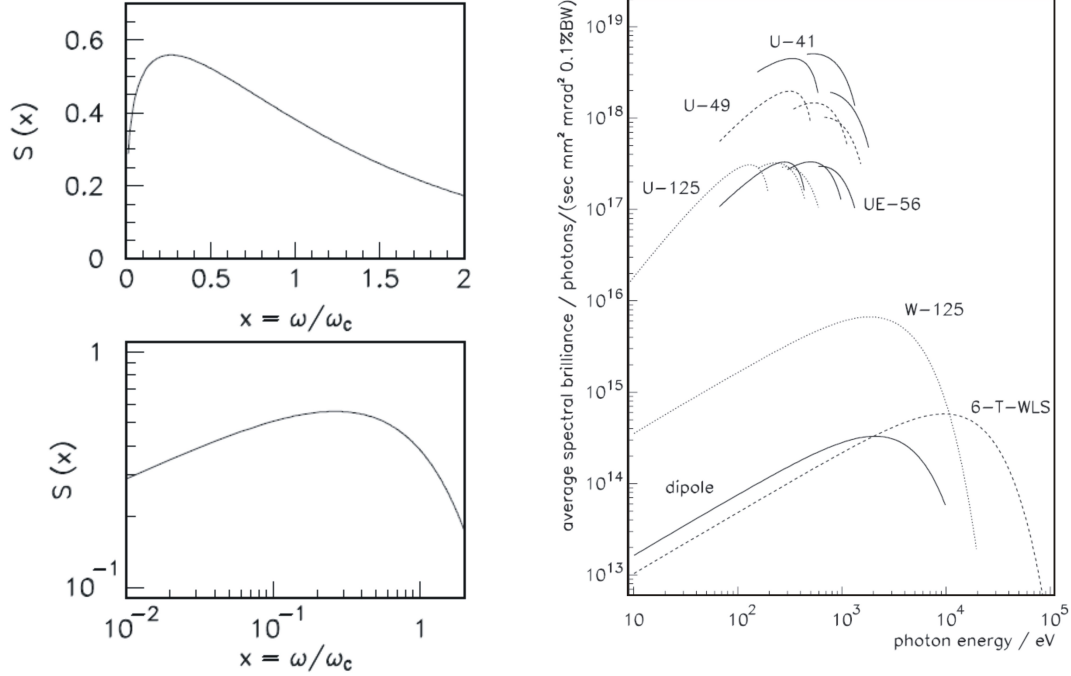


Abbildung 8: Links ist die Funktion $S(x)$, die das von Elektronen auf einem Kreisbogen emittierte Strahlungsspektrum beschreibt, linear und doppelt-logarithmisch aufgetragen. Die doppelt-logarithmische Darstellung wird gerne für Spektren von Synchrotronstrahlungsquellen verwendet. Als Beispiel sind im rechten Bild Spektren eines konventionellen Dipolmagneten, eines supraleitenden Dipols (6-T-WLS) sowie eines Wignlers (W-125) gezeigt. Die spektrale Form ist stets dieselbe. Die Kurven weiter oben beschreiben die erste, dritte und fünfte Harmonische von Undulatoren (s. nächster Abschnitt).

$$\Delta t = t_{\text{Elektron}} - t_{\text{Photon}} = \frac{2\rho\Theta}{\beta c} - \frac{2\rho \sin \Theta}{c} = \frac{2\rho\Theta}{\beta c} - \frac{2\rho}{c} \left(\Theta - \Theta^3/6 + \dots \right) \quad (241)$$

Mit $\Theta = 1/\gamma$ und $\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1} \approx \gamma - 1/(2\gamma)$ erhält man

$$\Delta t = \frac{2\rho}{c} \left(\frac{1}{\beta\gamma} - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{6\gamma^3} \right) \approx \frac{2\rho}{c} \left(\frac{\gamma - \gamma + 1/(2\gamma)}{(\gamma - 1/(2\gamma))\gamma} + \frac{1}{6\gamma^3} \right) \approx \frac{4\rho}{3c\gamma^3}. \quad (242)$$

Die damit abgeschätzte Breite des Spektrums ist vom Wert der kritischen Frequenz ω_c , die sich aus der exakten Berechnung ergibt, nicht weit entfernt:

$$\omega_{\text{typ}} = \frac{3\pi c\gamma^3}{2\rho} \quad \text{und} \quad \omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho}. \quad (243)$$

Die kritische Frequenz bzw. die zugehörige kritische Energie $E_c = \hbar\omega_c$ ist so definiert, dass

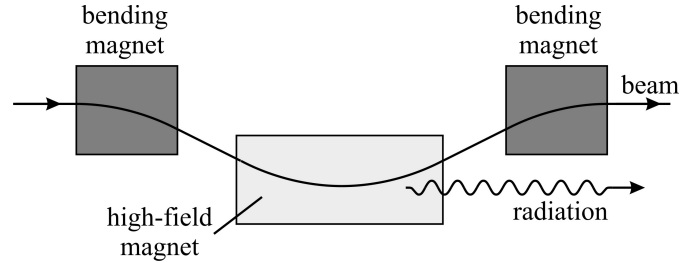


Abbildung 9: Ein „Wellenlängenschieber“ (*wavelength shifter*, WLS) als Beispiel für ein sog. *insertion device*. Der WLS besteht aus einem supraleitenden Magneten, um intensive Strahlung möglichst kurzer Wellenlänge zu produzieren, sowie zwei Gegenpolen, die den Ablenkwinkel ausgleichen.

sie das Leistungsspektrums in zwei gleichgroße Integrale teilt. Das Spektrum, hier ausgedrückt durch die Leistung pro Energieintervall, ist gegeben durch die Gesamtleistung P_s und

$$\frac{dP}{dE_\gamma} = \frac{P_s}{E_c} S(E_\gamma/E_c) \quad \text{mit} \quad S(x) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} x \int_x^\infty K_{5/3}(u) du. \quad (244)$$

Dieser Ausdruck ergibt sich nach längerer Rechnung für eine konstante Kreisbeschleunigung $\vec{\beta}$ (siehe weiter unten). Bemerkenswert ist die universelle Form des Spektrums $S(E_\gamma/E_c)$, die nur eine Funktion der Photonenenergie in Einheiten der kritischen Energie ist und durch Integration über die modifizierte Bessel-Funktion $K_{5/3}(u)$ berechnet werden kann. Die Funktion ist in Abb. 8 zusammen mit den Spektren einer Synchrotronstrahlungsquelle gezeigt. In der doppelt-logarithmischen Darstellung ist die Form des Spektrums aus Dipolmagneten und Wiggler (s. weiter unten) stets dieselbe.

Das Maximum des Spektrums liegt etwas unterhalb der kritischen Energie E_c , die mittlere Photonenenergie beträgt $\langle E_\gamma \rangle = 0,31 E_c$. Entlang eines Bogens von 1 rad emittiert ein Elektron im Mittel $20,6 \cdot E[\text{GeV}]$ Photonen.

9.3.2 Wellenlängenschieber

Neben den Dipolmagneten werden in Synchrotronstrahlungsquellen sogenannte *insertion devices* (IDs) verwendet, um Strahlung mit besonderen Eigenschaften zu produzieren. Hierfür werden zwischen den Magnetstrukturen gerade Strecken (typisch 5 m lang) freigehalten. Ein Beispiel ist der „Wellenlängenschieber“ (WLS), ein supraleitender Dipolmagnet, dessen hohes Feld (bis ca. 8 T) das Spektrum zu kürzeren Wellenlängen verschiebt – daher der Name. Da IDs insgesamt die Richtung des Elektronenstrahls nicht ändern sollen, benötigt der WLS zwei normal- oder supraleitende Gegenpole, siehe Abb. 9. Die am häufigsten verwendeten IDs, Wiggler und Undulatoren, werden weiter unten behandelt.

9.3.3 Winkelverteilung und abgestrahlte Leistung aus Dipolmagneten

Eine genauere Vorstellung von der Winkelverteilung der Abstrahlung in einem Dipolmagneten oder WLS gewinnt man aus der Auswertung des Strahlungsterms des elektrischen Felds

$$\vec{E}(t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\vec{n} \times \left\{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right\}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Bigg|_{\text{ret}} \quad (245)$$

mit den Vektoren

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{\beta}} = \frac{\dot{\vec{v}}}{c} = \frac{v^2}{\rho c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^2 c / \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (246)$$

wobei $\dot{\vec{v}} = v^2/\rho$ die Zentripetalbeschleunigung mit Bahnradius ρ ist. Hier ist θ der Winkel zwischen der Tangente an die Teilchenbahn und der Beobachtungsrichtung, die durch den Winkel ϕ zusätzlich azimuthal spezifiziert wird. Die abgestrahlte Leistung pro Flächeneinheit am Ort des Beobachters ist der Betrag des Poynting-Vektors

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E} \times [\vec{n} \times \vec{E}]) = \frac{1}{\mu_0 c} (E^2 \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{E}) \quad (247)$$

unter Verwendung der bac-cab-Regel. Der letzte Term verschwindet für $\vec{n} \perp \vec{E}$, was im Fernfeld in guter Näherung der Fall ist, so dass

$$\vec{S} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n} = \frac{dP}{r^2 d\Omega} \vec{n} \quad \text{und damit} \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{r^2 E^2}{\mu_0 c}. \quad (248)$$

Die resultierende Strahlungsleistung hat ihr Maximum bei $\theta = 0$ und konzentriert sich im Wesentlichen innerhalb eines Bereichs von $\theta \approx \pm 1/\gamma$.

Die spektrale Verteilung der Strahlung ist durch

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{i\omega e}{4\pi\sqrt{2\pi\epsilon_0 c} r_p} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) \right\} e^{-i\omega(t' + r/c - r_p/c)} dt' \quad (249)$$

gegeben, wobei im Vergleich zu Gl. 236 eine willkürliche Phase $-\omega r_p/c$ im Exponenten abgezogen wurde. Dadurch ist festgelegt, dass zur Zeit $t' = 0$ der Abstand vom Beobachter $r = r_p$ und die Phase im Exponenten null sei. Zu diesem Zeitpunkt bewegt sich das Elektron direkt auf einen Beobachter zu, der sich auf der Tangente zur Kreisbahn befindet. Damit ist

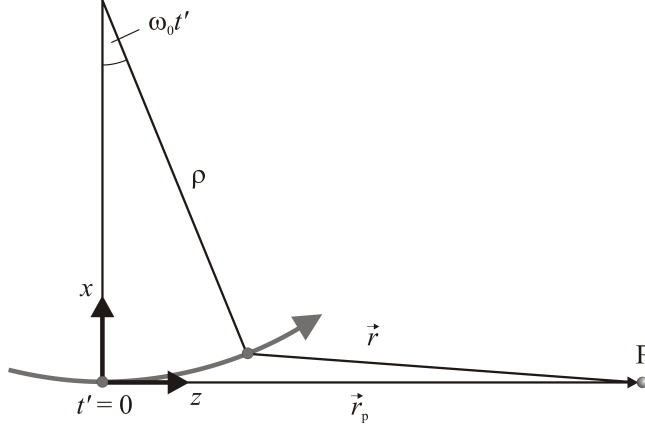


Abbildung 10: Ausschnitt aus der kreisförmigen Bahn eines Elektrons mit Biegeradius ρ und Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Zur Zeit $T' = 0$ befinde sich das Elektron im Koordinatenursprung. Der Beobachtungspunkt P ist durch den Ortsvektor \vec{r}_p gegeben, während \vec{r} der Vektor vom momentanen Ort der Ladung zu P ist.

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta \sin \omega_0 t' \\ 0 \\ \beta \cos \omega_0 t' \end{pmatrix}. \quad \text{Mit } \vec{n} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist } \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) = \begin{pmatrix} -\beta \sin \omega_0 t' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\omega_0 t' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (250)$$

für $\beta \approx 1$ und kleine Winkel $\omega_0 t'$, wobei ω_0 die Kreisfrequenz für einen Umlauf entlang der Kreisbahn ist. Aus Abb. 10 kann für den Vektor vom Elektron zum Beobachter

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -\rho(1 - \cos \omega_0 t') \\ 0 \\ r_p - \rho \sin \omega_0 t' \end{pmatrix}. \quad (251)$$

entnommen werden. Die Länge des Vektors ist

$$r = r_p \sqrt{\frac{\rho^2}{r_p^2} (1 - \cos \omega_0 t')^2 + \left(1 - \frac{\rho}{r_p} \sin \omega_0 t'\right)^2} = r_p \sqrt{2 \frac{\rho^2}{r_p^2} (1 - \cos \omega_0 t') + 1 - 2 \frac{\rho}{r_p} \sin \omega_0 t'}. \quad (252)$$

Der Term $1 - \cos \omega_0 t' \approx 1 - 1 + (\omega_0 t')^2 \approx 1/\gamma^2$ kann vernachlässigt werden, weil der Winkel $\omega_0 t'$ sich auf $\pm 1/\gamma$ beschränkt. Damit ist

$$r \approx r_p \left(1 - \frac{\rho}{r_p} \sin \omega_0\right) \approx r_p - \rho \left(\omega_0 t' + \frac{1}{6} \omega_0^3 t'^3\right) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = 2\pi \frac{\beta c}{2\pi \rho} = \frac{\beta c}{\rho}. \quad (253)$$

Im Exponenten von Gl. 249 kann daher für die Zeit

$$t' + \frac{r}{c} - \frac{r_p}{c} = t' - \beta t' + \frac{\beta^3 c^2}{6\rho^2} \approx \frac{1}{2\gamma^2} t' + \frac{c^2}{6\rho^2} t'^3 \quad (254)$$

geschrieben werden, wobei $\beta^3 \approx 1$ und $1 - \beta \approx 1/(2\gamma^2)$ gesetzt wurde⁴. Wird die Exponentialfunktion in Gl. 249 in der Form $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi$ geschrieben, so verschwindet bei der Integration über t' die ungerade Funktion $t' \cos\varphi$ und es bleibt zusammen mit Gl. 250

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{\omega \omega_0 e}{4\pi\sqrt{2\pi}\varepsilon_0 c r_p} \int_{-\infty}^{\infty} t' \sin\left(\frac{1}{2\gamma^2}\omega t' + \frac{c^2}{6\rho^2}\omega t'^3\right) dt'. \quad (255)$$

Das Integral kann durch tabellierte Funktionen ausgedrückt werden, entweder durch die Ableitung einer sogenannten Airy-Funktion oder durch eine modifizierte Bessel-Funktion [16]

$$\text{Ai}'(\nu) = \frac{d\text{Ai}}{d\nu}(\nu) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t \sin\left(\nu t + \frac{t^3}{3}\right) dt = -\frac{1}{\pi} \frac{\nu}{\sqrt{3}} K_{2/3}\left(\frac{2\nu^{3/2}}{3}\right). \quad (256)$$

Die übliche Schreibweise ist

$$\begin{aligned} \tilde{E}_y(\omega) &= 0 \\ \tilde{E}_x(\omega) &= \frac{-\sqrt{3}e\gamma}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon_0 c r_p} \frac{\omega}{2\omega_c} K_{2/3}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right), \quad \text{wobei} \quad \omega_c = \frac{3}{2} \frac{c\gamma^3}{\rho} \end{aligned} \quad (257)$$

die kritische Kreisfrequenz ist. Hier wurde angenommen, dass der Beobachtungspunkt in der Bahnebene des Elektrons liegt. Ist dies nicht der Fall, wird $\tilde{E}_y \neq 0$ und der Ausdruck für \tilde{E}_x wird etwas komplizierter, was an dieser Stelle aber nicht weiter ausgeführt werden soll.

9.4 Wiggler und Undulatoren

Wiggler und Undulatoren werden in jeder modernen Synchrotronstrahlungsquelle als *insertion devices* vielfach eingesetzt. Beide bestehen aus abwechselnd gepolten Dipolmagneten, in denen ein Elektronenstrahl eine sinusförmige Trajektorie verfolgt. Bei Wiggeln ist die Intensität der Synchrotronstrahlung gegenüber Dipolmagneten um die Zahl der Magnetpole N_p erhöht. Bei Undulatoren sorgt die Interferenz zwischen den in aufeinanderfolgenden Bögen emittierten Strahlungsanteilen dafür, dass ein Linienspektrum entsteht und die Intensität im Maximum der Linien sogar proportional zu N_p^2 ist.

Die wesentlichen Kennzahlen von Wiggeln und Undulatoren sind neben der Zahl der Perioden $N_u = N_p/2$ die Periodenlänge λ_u , definiert als der longitudinale Abstand zweier gleichartiger Polen, sowie das maximale Magnetfeld B_0 auf der Strahlachse, das von der Größe des Spalts g (*gap*) zwischen den gegenüberliegenden Polen abhängt. Beispiele sind in Abb. 11 gezeigt.

⁴Aus $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ folgt $1 - \beta^2 = 1/\gamma^2 = (1 + \beta)(1 - \beta) \approx 2(1 - \beta)$ und $1 - \beta \approx 1/(2\gamma^2)$.

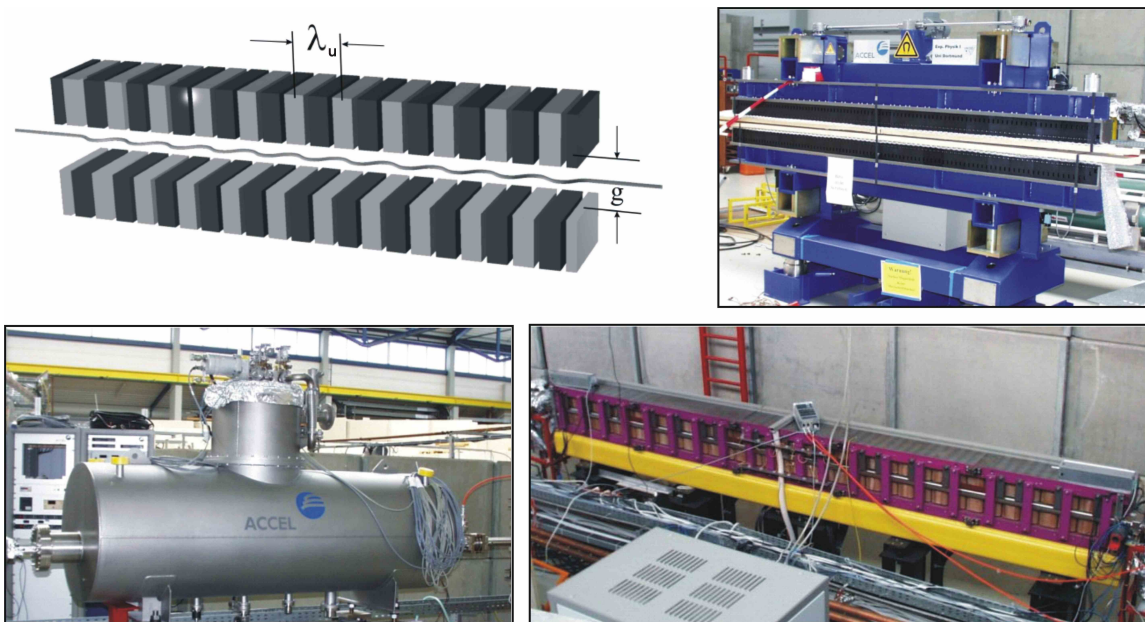


Abbildung 11: Schematische Darstellung eines Wigners bzw. Undulators (links oben) und drei Beispiele im Speicherring DELTA (TU Dortmund): rechts oben ein Undulator in Hybridbauweise (NdFeB und Eisenpole, $\lambda_u = 55$ mm), links unten ein supraleitender Wiggler (Magnetfeld bis zu 5,3 T, $\lambda_u = 144$ mm), rechts unten ein elektromagnetischer Undulator ($\lambda_u = 250$ mm).

9.4.1 Bauformen

Die Entwicklung von Wiggern und Undulatoren [17, 18] ist über 50 Jahre nach dem Bau des ersten Undulators [19] immer noch ein aktuelles Forschungsgebiet. Man unterscheidet u.a.

- Magnetfeld durch Elektromagnete mit Periodenlängen über ca. 10 cm oder Permanentmagnete (meist SmCo_5 oder NdFeB) für kürzere Perioden
- Elektromagnete mit normalleitenden Spulen und Eisenkern oder supraleitende Spulen (Magnetfeld bis zu 8 T)
- Permanentmagnete zwischen Eisenpolen (Hybrid-Bauweise) oder nur Permanentmagnete erlauben eine kompaktere Bauweise als Elektromagnete [20]
- Permanentmagnete bei Normaltemperatur oder kryogenisch gekühlt (wesentlich höheres Feld bei 77 K, der Temperatur von flüssigem Stickstoff)
- fester Magnetspalt oder mechanisch veränderlicher Spalt (zur Variation der Wellenlänge)

- planare Undulatoren mit sinusförmiger Elektronenbahn für linear polarisiertes Licht oder elliptische Undulatoren mit spiralförmiger Trajektorie für zirkular polarisierte Strahlung
- horizontal oder vertikal ablenkende planare Geräte (letztere nur bei Linearbeschleunigern)
- periodische oder quasiperiodische Undulatoren (mit periodisch modulierter Periodenlänge)
- symmetrische und asymmetrische Wiggler (letzte mit unterschiedlichen gegenläufigen Bögen)
- Undulatoren mit Polen außerhalb oder innerhalb der Vakuumkammer.

Zu den neueren Entwicklungen gehören supraleitende Undulatoren mit kurzer Periodenlänge, mechanisch sehr aufwändige In-Vakuum-Undulatoren, kryogenisch gekühlte Undulatoren und neue Bauformen für elliptische Undulatoren.

Die folgende Diskussion bezieht sich auf planare Undulatoren mit einem horizontal ablenkenden Magnetfeld, das in guter Näherung durch

$$\begin{aligned} B_y(s, y) &= B_0 \cosh(k_u y) \cos(k_u s) \\ B_s(s, y) &= -B_0 \sinh(k_u y) \sin(k_u s) \end{aligned} \quad (258)$$

beschrieben werden kann, wobei Effekte der endlichen Ausdehnung in x -Richtung ignoriert werden. Hier ist $k_u = 2\pi/\lambda_u$ und das maximale Feld auf der Achse hängt mit dem Feld \hat{B} direkt an der Oberfläche des Magnetpols gemäß

$$B_0 = \frac{\hat{B}}{\cosh(\pi g/\lambda_u)} \quad (259)$$

zusammen (siehe z.B. [10]). Mit SmCo₅-Magneten erreicht man etwa $\hat{B} = 1$ T, mit NdFeB bis zu 1.4 T. NdFeB ist jedoch empfindlicher gegen Strahlung und hohe Temperaturen. In Hybridbauweise können 2 T (Sättigung des Eisens) erreicht werden.

9.4.2 Elektronenbahn im Magnetfeld eines Wigglers bzw. Undulators

Die Eigenschaften von Wigglern und Undulatoren ergeben sich aus den Bewegungsgleichungen eines Elektrons in deren Magnetfeld. Unter den Annahmen $\dot{y} = 0$ und $B_x = 0$ führt die Lorentzkraft

$$\dot{\vec{p}} = m_e \gamma \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ \ddot{s} \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_s \end{pmatrix} \quad (260)$$

zu der Bewegungsgleichung in der horizontalen Ebene ($y = 0$)

$$\ddot{x} = -\dot{s} \frac{e}{m_e \gamma} B_y \approx -c \frac{e}{m_e \gamma} B_0 \cos(k_u s) = -c \frac{e}{m_e \gamma} B_0 \cos(\omega_u t) \quad (261)$$

mit $\dot{s} \approx c$ und $\omega_u = k_u c = 2\pi c / \lambda_u$. Zweimal integriert:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -c \frac{e}{\omega_u m_e \gamma} B_0 \sin(\omega_u t) = -c \frac{e \lambda_u}{2\pi c m_e \gamma} B_0 \sin(\omega_u t) = -c \frac{K}{\gamma} \sin(\omega_u t) \\ x(t) &= c \frac{K}{\omega_u \gamma} \cos(\omega_u t), \quad \text{wobei} \quad K \equiv \frac{\lambda_u e B_0}{2\pi m_e c} \quad \text{bzw.} \quad K = 93,4 \cdot \lambda_u[\text{m}] \cdot B_0[\text{T}] \end{aligned} \quad (262)$$

Die hier definierte Größe K heißt ‘‘Undulatorparameter‘‘ (engl. manchmal *deflection parameter*). Die maximale Auslenkung der Elektronenbahn in der Winkelkoordinate $x' \approx \dot{x}/c$ ist K/γ , so dass sich bei $K = 1$ die Kegel der Synchrotronstrahlung aus den verschiedenen Bögen der Bahn gerade berühren, wenn man ihnen – grob vereinfachend – einen halben Öffnungswinkel von $1/\gamma$ zuschreibt. Daher findet man oft in der Literatur (z.B. [10]) als Definition von Wiggler und Undulator

- $K \leq 1$ Undulator (Interferenz zwischen Strahlung verschiedener Bögen, Linienspektrum)
- $K > 1$ Wiggler (keine Interferenz, kontinuierliches Spektrum)

Abbildung 12 illustriert schematisch, dass diese Definition sehr willkürlich ist und der Übergang zwischen Undulator und Wiggler mit zunehmendem Magnetfeld fließend erfolgt.

Um die Bewegung in x herzuleiten, war die Näherung $\dot{s} \approx c$ ausreichend. Will man aber die longitudinale Bewegung genauer betrachten, muss man $\dot{s}^2 = \beta^2 c^2 - \dot{x}^2$ schreiben, da die Bewegung entlang der Bahn mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt und eine transversale Bewegung die Geschwindigkeit in s -Richtung reduziert. Mit $\beta^2 = 1 - 1/\gamma^2$ ist

$$\dot{s} = c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right)} \approx c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right) \right] = c \left[1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{c^2} \dot{x}^2 \right) \right], \quad (263)$$

wobei die Wurzel entwickelt wurde. Einsetzen von \dot{x} liefert

$$\dot{s} = c \left[1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + K^2 \sin^2(\omega_u t) \right) \right] = c \left[1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + K^2 \frac{1 - \cos(2\omega_u t)}{2} \right) \right], \quad (264)$$

woraus sich eine mittlere longitudinale Elektronengeschwindigkeit von

$$\beta^* c = \left[1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \right] c \quad (265)$$

mit einer zeitlichen Modulation $\sim \cos(2\omega_u t)$ ablesen lässt. Nochmals integriert ist die longitudinale Position gegeben durch

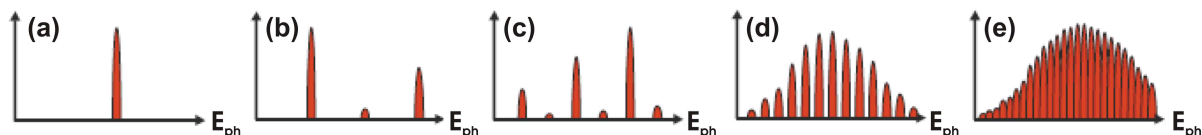
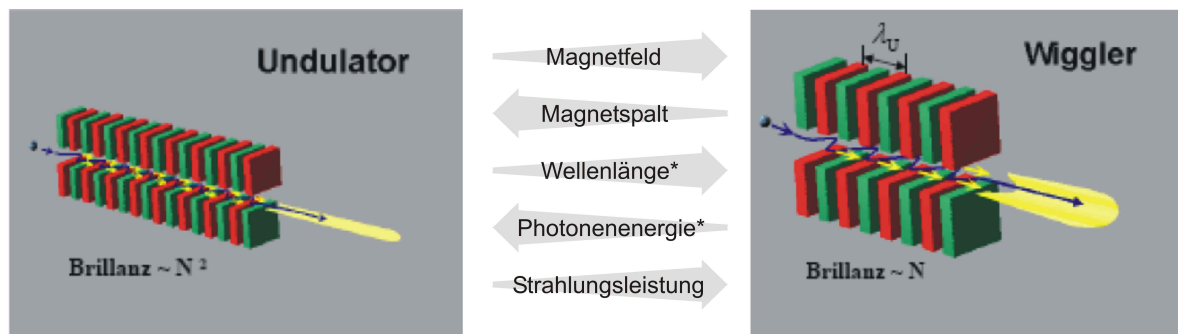


Abbildung 12: Schematische Darstellung des Übergangs von einem Undulator (links) zu einem Wiggler (rechts). Die Größen mit * beziehen sich auf die Fundamentale (1. Harmonische), die im Spektrum eines reinen Undulators (a) die wesentliche Linie darstellt. Mit zunehmendem Feld treten (ungeradzahlig) Harmonische auf (b)-(d), die das Spektrum schließlich dominieren und im Fall eines idealen Wigglers (e) zu einem kontinuierlichen Spektrum verschmelzen, wie es von Dipolmagneten emittiert wird.

$$s(t) = \beta^* ct + \frac{cK^2}{8\omega_u \gamma^2} \sin(2\omega_u t). \quad (266)$$

In einem mit β^*c mitbewegten System eilt ein Elektron periodisch voraus oder bleibt zurück, und zwar mit der doppelten Frequenz der transversalen Schwingung. Zusammen mit $x(t)$ ergibt sich daraus eine “8“-förmige Lissajous-Figur, wobei die “8“ mit zunehmendem K breiter wird.

9.4.3 Wiggler- und Undulatorstrahlung

Abbildung 13 illustriert die Abstrahlung eines Undulators für verschiedene Fälle, wobei links $x' = dx/ds$ in Einheiten des halben Öffnungskegels (vereinfachend als $1/\gamma$ angenommen) gegen die Zeit in Einheiten der Periodendauer aufgetragen ist:

- Bei kleinem K wird ein Beobachter auf der verlängerten Undulatorachse stets vom $1/\gamma$ -Kegel getroffen. Das wahrgenommene periodische elektrische Feld entspricht einer Linie im Frequenzspektrum (vgl. Hertzscher Dipol).
- Bei größerem K trifft der $1/\gamma$ -Kegel den Beobachter periodisch. Die Fourier-Transformierte des gepulsten elektrischen Feldes zeigt ungeradzahlig Vielfache der Grundfrequenz.

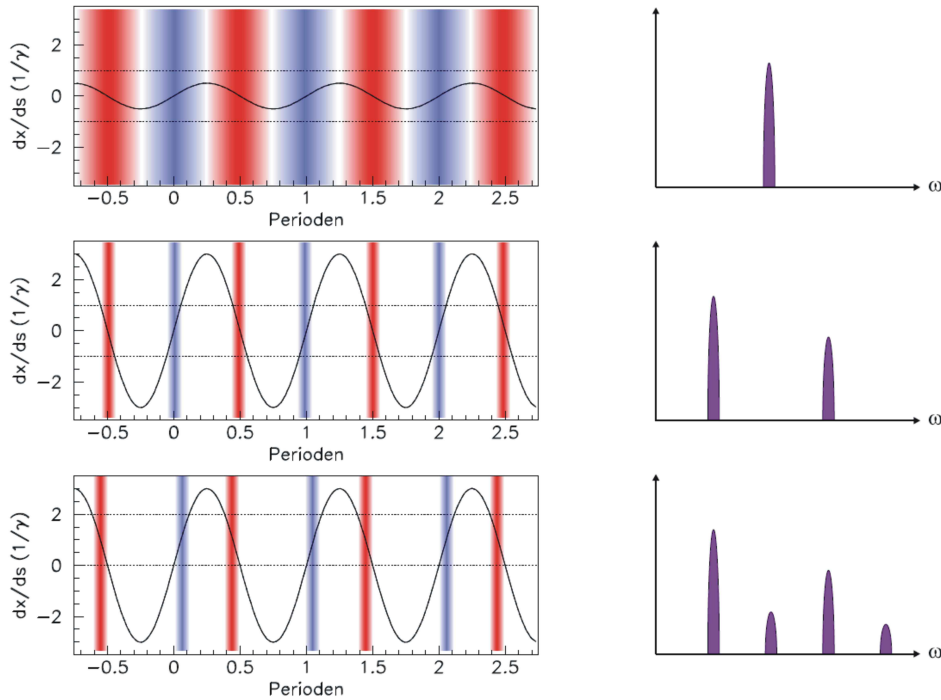


Abbildung 13: Bewegung von Elektronen im Undulator, dargestellt durch den Winkel x' (in Einheiten von $1/\gamma$) als Funktion der Zeit (in Einheiten der Periodendauer). Farblich unterlegt sind die Zeitintervalle, in denen ein Beobachter das elektrische Feld eines auf $1/\gamma$ begrenzten Strahlungskegels wahrnimmt. Rot und blau entsprechen entgegengesetzten Feldrichtungen. Rechts ist das entsprechende Undulatorspektrum gezeigt. Oben: $K \ll 1$. Mitte: $K > 1$, Beobachter auf der Undulatorachse sieht ungerade Harmonische. Unten: $K > 1$, Beobachter unter einem Winkel zur Undulatorachse sieht auch gerade Harmonische.

- Ist der Beobachter nicht auf der Undulatorachse (aber in der Undulatorebene), so ist das $\pm 1/\gamma$ -Band, innerhalb dessen er getroffen wird, um den Beobachtungswinkel verschoben. Die Zeitintervalle, in denen ein Feld wahrgenommen wird, rücken paarweise zusammen. Im Spektrum treten nun auch geradzahle Vielfache der Grundfrequenz auf.

Diese idealisierte Darstellung entspricht dem tatsächlich beobachteten Verhalten, auch wenn der Strahlungskegel nicht scharf auf $1/\gamma$ begrenzt ist. Das Spektrum auf der Achse enthält nur ungeradzahle Harmonische, weil äquidistante, gleich große Pulse des elektrischen Felds mit entgegengesetztem Vorzeichen aufeinander folgen. Erst ein Bruch dieser Antisymmetrie ergibt geradzahle Fourier-Komponenten. Bei einer horizontalen Verschiebung des Beobachtungspunkts geschieht dies durch Verschiebung der Zeitpunkte der Feldpulse, wie in der Abbildung dargestellt. Bei einer vertikalen Verschiebung treten ebenfalls geradzahle Harmonische auf, weil nun die Feldvektoren zwar eine entgegengesetzte horizontale, aber auch eine gleichgerichtete vertikale

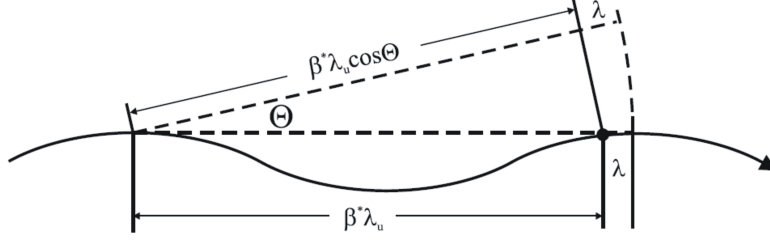


Abbildung 14: Die Bedingung für konstruktive Interferenz im Undulator ist, dass ein Elektron pro Undulatorperiode gerade um eine Wellenlänge gegenüber dem Licht zurückbleibt. Unter dem Winkel Θ verkürzt sich die in Beobachtungsrichtung projizierte Strecke, die das Elektron zurücklegt, um $\cos \Theta$.

Komponente besitzen.

Die Wellenlänge λ der fundamentalen Undulatorlinie erhält man durch folgende Betrachtung: eine kohärente Addition elektromagnetischer Wellen erfordert Phasengleichheit, d.h. ein Elektron muss zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bögen gerade um eine Wellenlänge gegenüber dem Licht zurückbleiben. Mit der mittleren Elektronengeschwindigkeit β^*c ist die Wegdifferenz zwischen Licht und Elektron (vgl. Abb. 14)

$$\lambda = \lambda_u - \lambda_u \beta^* c \cos \Theta = \lambda_u \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left[1 + \frac{K^2}{2} \right] \right) \left(1 - \frac{\Theta^2}{2} + \dots \right) \right\}, \quad (267)$$

wobei Θ der Beobachtungswinkel relativ zur Undulatorachse ist und der Kosinus entwickelt wurde. Vernachlässigt man beim Ausmultiplizieren das Produkt der kleinen Terme, ergibt sich die Resonanzbedingung zwischen Wellenlänge, Lorentzfaktor, Undulatorperiode und K -Wert

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \Theta^2 \right). \quad (268)$$

Die Wegdifferenz zwischen Licht und Elektron entsteht durch die endliche Elektronenmasse (1. Term) und durch den Umweg der sinusförmigen Bahn (2. Term). Für $\Theta \neq 0$ verkürzt sich die vom Elektron in Beobachtungsrichtung zurückgelegte Strecke, so dass die Wegdifferenz und damit λ weiter zunimmt (3. Term). Die Abweichung des Beobachtungspunkts von der Elektronenachse führt also zum Auftreten geradzahlgiger Harmonischer (s. oben) und zur Rotverschiebung aller Undulatorlinien.

Die Breite der Linien im Undulatorspektrum ist mit der Dauer des Wellenzuges $T = N_u \lambda / c = 2\pi N_u / \omega_0$ verknüpft, wobei N_u die Zahl der Perioden des Magnetfeldes angibt. Da die Elektronen pro Periode um eine Wellenlänge zurückbleiben, ist $N_u \lambda$ die gesamte Licht-Elektronen-Wegdifferenz. Das Fourierintegral der kastenförmigen Amplitudenverteilung A_0 zwischen $\pm T/2$ ist

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin [(\omega - \omega_0)T/2]}{(\omega - \omega_0)T/2} \quad (269)$$

und die Halbwertsbreite der Intensität $I(\omega) = A^2(\omega)$ ist

$$2 \frac{\omega_{1/2} - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{0.9}{N_u}. \quad (270)$$

Mit zunehmender Periodenzahl erhöht sich somit die Brillanz der Undulatorstrahlung aufgrund der abnehmenden Linienbreite. Außerdem wird die Standardabweichung der Winkelverteilung der n -ten Harmonischen in jeder Dimension gemäß

$$\sigma_{x',y'} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1 + K^2/2}{2N_u n}} = \sqrt{\frac{\lambda}{nL}} \quad (271)$$

kleiner, so dass die Brillanz insgesamt mit N_u^2 steigt. Im letzten Schritt wurde die Resonanzbedingung und die Gesamtlänge des Undulators $L = N_u \lambda_u$ eingesetzt.

Aus der Larmor-Formel kann man mit der Elektronenbeschleunigung \ddot{x} die insgesamt abgestrahlte Leistung eines Elektrons ableiten. Eine praktische Formel für die Leistung bei einem Strahlstrom I ist

$$P_{\text{total}}[\text{W}] = 7.26 \frac{E^2[\text{GeV}^2] I[\text{A}] K^2 N_u}{\lambda_u[\text{cm}]}, \quad (272)$$

wobei der Unterschied zwischen Wiggler und Undulator nur in der räumlichen und spektralen Verteilung dieser Leistung liegt.

10 Erzeugung ultrakurzer Strahlungspulse

Die Erzeugung ultrakurzer Strahlungspulse in Elektronenspeicherringen wird im Rahmen des vorliegenden Kurses betont, da sie einen Forschungsgegenstand an der Synchrotronstrahlungsquelle DELTA in Dortmund darstellt. Außerdem dient dieses Kapitel als Überleitung zur Physik der Freie-Elektronen-Laser.

Ultrakurze Phänomene auf der atomaren Ebene (z.B. Gitterschwingungen, chemische Reaktionen, Phasenübergänge, schnelle elektronische oder magnetische Änderungen), die auf der Femtosekundenskala stattfinden, können mit Anrege-Abfrage-Experimenten (engl. *pump-probe*) untersucht werden. Hierbei setzt ein kurzer Strahlungspuls den Prozess in einer Probe in Gang, während ein zweiter Puls den Zustand der Probe analysiert, z.B. durch eine Änderung der Reflektivität, der Transmission oder der Photoelektronenrate. Durch Variation der Zeit zwischen beiden Pulsen wird der zeitabhängige Vorgang dargestellt, wobei eine Weglängenänderung um $1 \mu\text{m}$ (die durch eine mechanische Bewegung von Spiegeln leicht machbar ist) einer zeitlichen Änderung von 3,3 fs entspricht.

Die Zeitauflösung in Anrege-Abfrage-Experimenten hängt von der Pulsdauer der beiden beteiligten Pulse sowie der Genauigkeit ab, mit der ihr zeitlicher Abstand kontrolliert werden kann. Die Dauer von kurzwelligen Synchrotronstrahlungspulsen entspricht der Länge der Elektronenpakete im Speicherring, also typischerweise 30 bis 100 ps (Halbwertsbreite). Mit Kurzpuls-Lasern [21] werden Pulsdauern um 30 fs und darunter erreicht, allerdings bei langen Wellenlängen (z.B. 800 nm mit Titan-dotiertem Saphir als Lasermedium). Für die Erzeugung von Strahlung mit kurzer Pulsdauer *und* kurzer Wellenlänge gibt es mehrere Ansätze:

- Methoden aus der Laserphysik wie die Erzeugung hoher Harmonischer der Laserpulse beim Durchflug durch ein Gas (*high-harmonic generation*, HHG) [22] oder kurzwelliger Strahlung aus laser-basierten Plasmaquellen.
- Methoden aus der Beschleunigerphysik, mit denen kurze Röntgenpulse in Synchrotronstrahlungsquellen und Freie-Elektronen-Lasern [23] erzeugt werden.

Da Freie-Elektronen-Laser (FEL) nach dem SASE-Prinzip (s. nächstes Kapitel), ohnehin kurze Elektronenpakete erfordern, sind sie hervorragend als Kurzpulsquellen geeignet. Allerdings gibt es weltweit nur wenige kurzwellige FELs und sie erzeugen jeweils nur Strahlungspulse für ein Experiment (oder wenige Experimente abwechselnd) mit wesentlich kleinerer Wiederholrate als Speicherringe. Es ist daher sinnvoll, Methoden zur Erzeugung kurzer Pulse auch an konventionellen Synchrotronstrahlungsquellen zu etablieren. Im Folgenden werden solche Methoden kurz beschrieben (weitere Details in [24]).

10.1 Kurze Pulse durch Verkürzung der Elektronenpakete

Die Pulsdauer in Elektronenspeicherringen steigt proportional zur Wurzel des *momentum compaction factors* α und näherungsweise umgekehrt proportional zur Wurzel der Hochfrequenz-(Hf-)Spannung V_0 , was aus den Gleichungen für die longitudinale Strahldynamik ersichtlich ist (Abschnitt 4.4 in Teil 1 des Skripts). Der Hf-Spannung sind technische und ökonomische Grenzen gesetzt, doch α kann sehr stark verkleinert werden, wenn man von der üblichen Achromat-Struktur abweicht und negative Dispersion zulässt.

Ein sogenannter *low- α* -Betrieb mit kurzen Elektronenpaketen wird z.B. bei BESSY [25] und der MLS [26], beide in Berlin, und ANKA [27] in Karlsruhe routinemäßig durchgeführt. Die typische Pulsdauer ist hier wenige Pikosekunden. Oberhalb der Schwelle der sogenannten Mikrowellen-Instabilität ist die Pulsdauer jedoch auch ungefähr proportional zur dritten Wurzel des Elektronenpaketstroms I_b , so dass eine Verkürzung um einem Faktor 10 eine Verkleinerung von I_b um drei Größenordnungen erfordert. Vorteile der Methode sind, dass – wenn die Magnetstruktur grundsätzlich geeignet ist – kein zusätzlicher technischer Aufwand erforderlich ist und dass die kurzen Pulse an jedem Strahlrohr des Speicherrings mit der vollen Wiederholrate der Elektronenpakete zur Verfügung stehen.

Eine deutliche Verkürzung der Elektronenpakete durch einen hohen Gradienten der Hf-Spannung soll erstmals im Rahmen des BESSY-VSR-Projekts (*variable storage ring*) vorgenommen werden [28]. Geplant ist, eine gerade Strecke des Speicherrings BESSY mit einer supraleitenden Struktur zu besetzen, die Resonatoren mit zwei Frequenzen beinhaltet: 1,50 GHz und 1,75 GHz. Die Addition der beiden sinusförmigen Hf-Spannungen besitzt im Abstand von 2 ns abwechselnd einen hohen und einen niedrigen Gradienten, sodass gleichzeitig kurze und lange Elektronenpakete im Speicherring umlaufen, um unterschiedlichen Nutzeranforderungen gerecht zu werden.

10.2 Kurze Pulse durch longitudinal-transversale Korrelation

(2) Zur Erzeugung kurzer Strahlungspulse müssen die Elektronenpakete nicht zwangsläufig verkürzt werden – eine Korrelation zwischen longitudinaler und transversaler Koordinate genügt, um einen Puls zu komprimieren oder mit einer Blende Strahlung aus einem kürzeren Teilbereich des Elektronenpakets zu extrahieren. So wurde z.B. vorgeschlagen, die Elektronenpakete mit transversal ablenkenden Hf-Resonatoren zu drehen und nach dem Durchflug durch einen oder mehrere Undulatoren in einem zweiten Resonator exakt zurückzudrehen [29]. Wenn sich ein Elektronenpaket beim zeitlichen Nulldurchgang einer TM_{110} -Mode im Zentrum des Resonators befindet, werden der vordere und der hintere Teil des Pakets in entgegengesetzte Richtung abgelenkt und führen gegenläufige Betatronschwingungen aus. Eine technische Umsetzung dieser Methode, die schwierig und finanziell aufwändig ist, hat bislang weltweit nicht stattgefunden. Simulationen zeigen, dass die erreichbare Pulsdauer im Bereich von 1 bis 2 ps [30] liegt. Die Wiederholrate der Pulse hängt u.a. davon ab, ob gepulste normalleitende Resonatoren oder supraleitende Resonatoren im Dauerstrichbetrieb eingesetzt werden.

10.3 Laser-basierte Methoden zur Erzeugung kurzer Pulse

Zwei Arten der Wechselwirkung zwischen Laserpulsen und Elektronen in einem Speicherring können für die Erzeugung kurzer Strahlungspulse relevant sein:

- Wenn ein Laserpuls ein Elektronenpaket kreuzt (z.B. unter 90°), entsteht durch Compton- bzw. Thomson-Streuung ein Gammastrahlungspuls, dessen Dauer von der Laserpulslänge und dem Durchmesser des Elektronenpakets abhängt. Ein solches Experiment wurde 1996 an einem 50-MeV-Linearbeschleuniger in Berkeley durchgeführt [31]. Da der Streuquerschnitt klein ist, werden nur wenige Photonen gestreut, deren Wellenlänge innerhalb der Winkelverteilung variiert.
- Wenn ein Laserpuls sich zusammen mit relativistischen Elektronen durch einen Undulator bewegt, dessen Wellenlänge auf die Laserwellenlänge eingestellt ist, wird die Energie der Elektronen periodisch moduliert. Der Mechanismus ist der Wechselwirkung in einem

FEL sehr ähnlich und wird im nächsten Kapitel beschrieben. Im Fall von Femtosekunden-Laserpulsen beschränkt sich die Energiemodulation auf einen Bereich von etwa 1/1000 der Länge des Elektronenpakets.

An Elektronenspeicherringen wird Compton-Streuung bislang nur zu Diagnosezwecken eingesetzt (Messung der Strahlenergie und Energiebreite, siehe Kapitel 7 in Teil 1 des Skripts). Die laser-induzierte Energiemodulation dagegen ist durchaus von praktischer Relevanz.

10.3.1 Femtoslicing

Durch Wechselwirkung mit einem kurzen Laserpuls in einem Undulator (dem sog. „Modulator“) wird die Elektronenenergie innerhalb einer kurzen Scheibe (*slice*) des Elektronenpakets moduliert. Aufgrund der energieabhängigen Biegewinkel in einem nachfolgenden Dipolmagneten treten die modulierten Elektronen seitlich aus dem Elektronenpaket heraus und ihre die Synchrotronstrahlung aus einem zweiten Undulator (dem „Radiator“) kann geometrisch mit einer Blende extrahiert werden (s. Abb. 15). Dieses Verfahren wurde 1996 vorgeschlagen [34] und ist als *femtosing* bekannt. Da sich in der energiemodulierten Scheibe nur 1/1000 der Elektronen befinden, ist die Ausbeute an Photonen sehr gering und das Experimentieren mit diesen Strahlungspulsen schwierig, doch ist die Pulsdauer sehr kurz (ca. 100 fs) und die Wellenlänge und Polarisation der Strahlung kann durch Verwendung eines geeigneten Radiators in weiten Grenzen frei gewählt werden. Die Wiederholrate der kurzen Strahlungspulse ist durch das Lasersystem gegeben. Für die erforderlichen Laserpulse im mJ-Bereich beträgt sie typischerweise wenige kHz.

Diese Form der longitudinal-transversalen Korrelation wurde erstmals an der ALS in Berkeley [32] demonstriert und wird an mehreren Anlagen (BESSY in Berlin [33], SLS am Paul-Scherrer-Institut/Schweiz, SOLEIL in Frankreich) routinemäßig zur Untersuchung schneller Prozesse in Festkörpern eingesetzt.

10.3.2 Dichtemodulation und kohärente Emission

Ein weiteres Verfahren, das auf der Modulation der Elektronenenergie durch einen kurzen Laserpuls in einem Undulator („Modulator“) basiert, ist *coherent harmonic generation* (CHG, Abb. 16 oben). Hierbei findet jedoch keine geometrische Trennung statt, sondern im nachfolgenden Undulator („Radiator“) erfolgt die Abstrahlung des kurzen Pulses kohärent, sodass dessen Intensität proportional zum Quadrat der Elektronenzahl ist ($I_{\text{kurz}} \sim n_{\text{kurz}}^2$), während die „normale“ Synchrotronstrahlung inkohärent ($I_{\text{lang}} \sim n_{\text{lang}}$) emittiert wird. Zwar sind wieder nur 1/1000 der Elektronen beteiligt, aber n_{kurz} ist trotzdem eine große Zahl (10^4 bis 10^5), sodass der kurze Puls intensiver strahlt als die lange Strahlungskomponente. Die kohärente Abstrahlung wird dadurch erreicht, dass die Energiemodulation in einer Umwegstrecke aus Magneten („Schikane“) aufgrund der energieabhängigen Flugzeit in eine Dichtemodulation (*micro bunching*) überführt wird, deren Periode der Laserwellenlänge λ_L entspricht. Die kohärente Abstrahlung

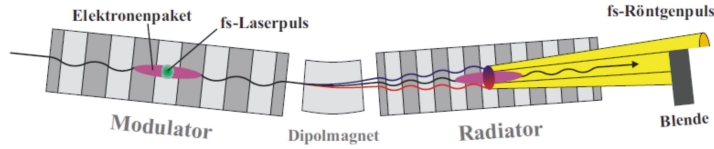


Abbildung 15: Erzeugung ultrakurzer Röntgenpulse durch Energiemodulation einer dünnen Scheibe eines Elektronenpakets mit einem Femtosekunden-Laserpuls in einem Undulator („Modulator“). Aufgrund der unterschiedlichen Biegewinkel im Dipol können die kurze und lange Strahlungskomponente im zweiten Undulator („Radiator“) geometrisch separiert werden.

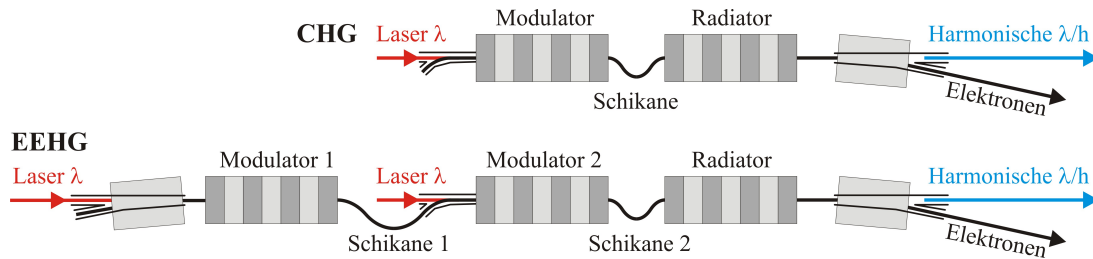


Abbildung 16: Erzeugung ultrakurzer Strahlungspulse im Vakuum-UV-Bereich durch Energiemodulation in einem oder zwei Undulatoren („Modulator“) sowie anschließende Dichtemodulation und kohärente Abstrahlung in einem weiteren Undulator („Radiator“). Im Vergleich zum CHG-Verfahren (oben) können mit EEHG (unten) höhere Harmonische h erreicht werden.

erfolgt gemäß der in der Dichtemodulation enthaltenen Fourier-Komponenten, also nicht nur bei λ_L , sondern auch bei Harmonischen λ_L/h , wobei h eine ganze Zahl bis ca. 5 ist. Die Phasenraum- und Dichteverteilung der Elektronen ist in Abb. 17 (linke Spalte) gezeigt.

Diese Methode wurde zuerst am Speicherring ACO in Frankreich mit langen Laserpulsen [35] und später bei UVSOR in Okazaki/Japan [36] ELETTRA und in Trieste/Italien [37] demonstriert. Zurzeit wird CHG am Speicherring DELTA in Dortmund [38] und (mit Einschränkungen) bei UVSOR erprobt. Auch hier ist die Wiederholrate der kurzen Strahlungspulse durch das Lasersystem gegeben. Die Pulsintensität ist wesentlich höher als beim „Slicing“-Verfahren, doch die Wellenlänge ist auf Harmonische der Laserwellenlänge beschränkt.

Eine Erweiterung des CHG-Verfahrens ist *echo-enabled harmonic generation* (EEHG, Abb. 16 unten), wobei eine zweifache Energiemodulation in zwei Modulatoren für einen höheren Gehalt an Harmonischen sorgt [39]. Ein Maß dafür ist der sog. *bunching*-Faktor $|\langle \exp(i2\pi h z_i / \lambda_L) \rangle|$, wobei z_i die longitudinale Position des i -ten Elektrons, $2\pi h z_i / \lambda_L$ seine Phasenlage bezüglich der h -ten Harmonischen der Laserwellenlänge und $|\langle \dots \rangle|$ der Betrag des Mittelwerts über alle Elektronen ist. Das Ziel ist also, einen für die kohärente Emission ausreichend hohen *bunching*-Faktor für möglichst hohe Harmonische h zu erreichen. Beim CHG-Verfahren nimmt dieser mit $\exp(-h^2)$ ab, während die zweifache Energiemodulation einen *bunching*-Faktor proportional zu

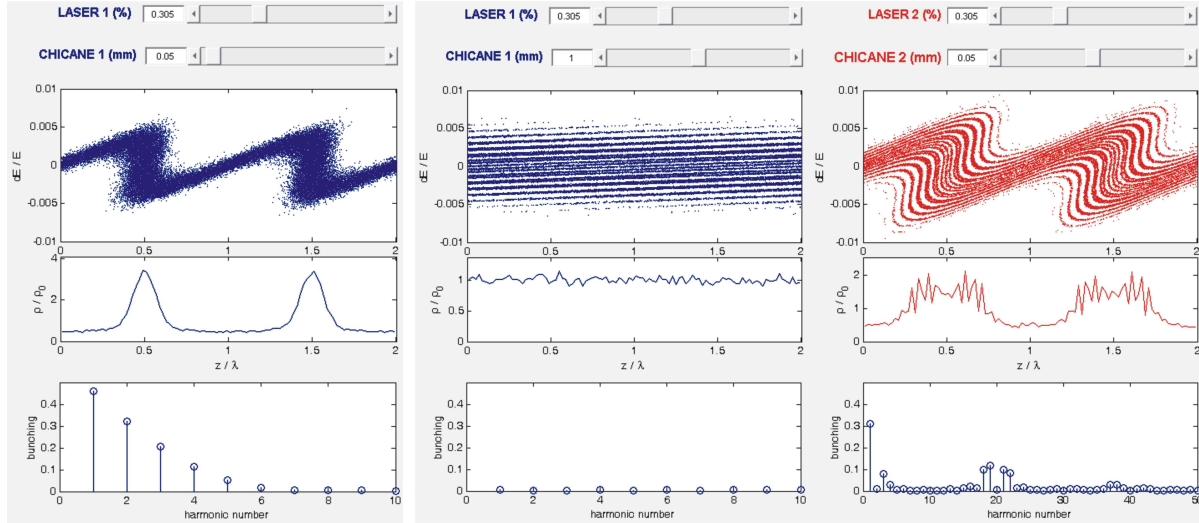


Abbildung 17: MATLAB-Rechnung für zwei Verfahren zur Erzeugung kurzer Strahlungspulse – CHG (linke Spalte) und EEHG (mittlere und rechte Spalte für die erste und zweite Modulator/Schikane-Kombination). Dargestellt ist oben jeweils der Phasenraum (Energieabweichung gegen longitudinale Koordinate in Einheiten der Laserwellenlänge), darunter die longitudinale Elektronendichte und unten der *bunching*-Faktor für Harmonische von 1 bis 10 bzw. 1 bis 50 (rechts).

$h^{-1/3}$ ermöglicht, sodass höhere Harmonische und damit kürzere Wellenlängen erreicht werden. Die Elektronenverteilung im Phasenraum ist in Abb. 17 (mittlere und rechte Spalte) gezeigt. Mit der ersten Energiemodulation und einer Schikane mit großem R_{56} -Parameter (longitudinale Verschiebung pro Energieabweichung) wird ein flaches Streifenmuster im Phasenraum erzeugt, das einer weiteren Energiemodulation unterworfen wird. Die zweite Schikane dreht die Streifen parallel zur $\Delta E/E$ -Achse, so dass in der Projektion eine Dichteverteilung mit eng benachbarten Linien und Fourier-Komponenten bei hohen Harmonischen entsteht.

Ein erstes EEHG-Demonstrationsexperiment hat bei SLAC in Menlo Park/USA stattgefunden [40]. Dort wurde inzwischen die 75. Harmonische erreicht wurde [42]. Bei SINAP in Shanghai/China wurde EEHG mit FEL-Verstärkung bis zur Sättigung demonstriert [41]. Beides sind Experimente an Linearbeschleunigern im FEL-Kontext (siehe weiter unten). Die erstmalige Anwendung von EEHG an einem Speicherring ist bei DELTA geplant. Phasenraum, Dichtemodulation und *bunching*-Faktor sind für CHG und EEHG in Abb. 17 dargestellt.

10.3.3 Kohärente Emission von Terahertz-Strahlung

Als Folge der laser-induzierten Energiemodulation entsteht in der longitudinalen Elektronenverteilung über mehrere Umläufe eine Lücke, da die Weglänge der Elektronen im Speicherring energieabhängig ist (siehe Kapitel 6 in Teil 1 des Skripts: Matrixelement r_{56} und *momentum*

compaction factor). Analog zu einem gleichermaßen kurzen Elektronenpaket bewirkt die Lücke eine kohärente Strahlungsemission bei Wellenlängen, die mit der Größe der Lücke vergleichbar sind, also im THz- und sub-THz-Bereich. Sie ist somit ein sehr empfindlicher Indikator für die Laser-Elektronen-Wechselwirkung [43].

Bei DELTA wurde sub-THz-Strahlung über ca. 20 Umläufe nachgewiesen und sogar eine Wiederkehr des Signals nach einer halben Synchrotron-Oszillation (ca. 75 Umläufe) konnte detektiert werden [44]. Während die mit einer Lücke in der Elektronenverteilung kohärent Strahlung ein breites Spektrum aufweist, kann durch eine periodischen Abfolge mehrerer Lücken im selben Elektronenpaket schmalbandige Strahlung erzeugt werden. Dies wurde bei UVSOR in Japan im sub-THz-Bereich [45] und bei DELTA im THz-Bereich demonstriert [46]. Mehrere Lücken werden durch die Wechselwirkung des Elektronenpakets mit einem längeren Laserpuls erzeugt, dessen Intensität entlang des Pulses periodisch moduliert wurde.

11 Freie-Elektronen Laser

11.1 Einleitung

Ein Freie-Elektronen-Laser (FEL) ist ein schmalbandiger Verstärker für elektromagnetische Strahlung. Der erste FEL wurde 1976 an der Stanford Universität in Palo Alto/USA bei einer Wellenlänge von $3,4 \mu\text{m}$ in Betrieb genommen [47]. Ein Vorläufer war das „Ubitron“, eine Verstärkerröhre für mm-Wellen, die 1957 entwickelt wurde [48]. Heute existieren zahlreichen FELs, die Strahlung im Infrarotbereich erzeugen. Der erste FEL für Wellenlängen unterhalb des sichtbaren Bereichs ist seit 2000 bei DESY in Hamburg in Betrieb [49] (zuerst bei 109 nm, inzwischen 4 nm). Seit 2009 gibt es bei SLAC in Menlo Park/USA einen Röntgen-FEL [50], gefolgt von einem weiteren Röntgen-FEL in Hyogo/Japan [51] und einen FEL mit *Seeding* in der Nähe von Trieste/Italien [52]. Neben den in Tabelle 2 genannten FELs im Nutzerbetrieb existieren einige Testanlagen, z.B. SPARC in Frascati/Italien, NLCTA bei SLAC und SDUV-FEL in Shanghai/China. Im Jahr 2017 nehmen weitere Röntgen- und UV-FELs den Nutzerbetrieb auf: der Europäische XFEL in Hamburg, der SwissFEL am Paul-Scherrer-Institut in Villigen/Schweiz, der PAL-XFEL in Pohang/Korea sowie DCLS in Dalian/China.

FELs für kurze Wellenlängen, um die es in diesem Kapitel hauptsächlich gehen soll, bestehen aus einem Linearbeschleuniger für Elektronen und einem nachfolgenden Undulator, in dem der Verstärkungsprozess stattfindet. Wie Abb. 18 zeigt, ist die Spitzenbrillanz etwa neun Größenordnungen höher als bei konventionellen Synchrotronstrahlungsquellen. Etwa drei Größenordnungen sind dadurch begründet, dass die Pulsdauer im Femtosekunden- statt im Pikosekundenbereich liegt. Darüber hinaus ist die Intensität proportional zum Quadrat der Elektronenzahl, da die Abstrahlung aufgrund von *micro bunching* (einer Dichtemodulation mit der Periodizität der Wellenlänge) kohärent erfolgt. Synchrotronstrahlung dagegen wird von zufällig verteilten Elektronen emittiert, sodass ihre Intensität nur linear mit der Elektronenzahl zunimmt.

Name (in Betrieb seit) Standort/Land	max. Strahlenergie [GeV]	min. Wellenlänge [nm]	FEL-Typ	Referenz
FLASH (2000) Hamburg/Germany	1,2	4	SASE	[49]
LCLS (2009) Menlo Park/USA	15	0,15	SASE	[50]
FERMI@ELETTRA (2010) Trieste/Italy	1.5	4	HGHH seeding	[52]
SACLA (2011) Hyogo/Japan	8	0,1	SASE	[51]

Tabelle 1: FELs für kurze Wellenlängen im Nutzerbetrieb (Stand Anfang 2017). Die Begriffe SASE und HGHH werden in Abschnitt 11.4 erläutert.

Gegenüber Synchrotronstrahlungsquellen liegt die Stärke von FELs also in der hohen Spitzenintensität, so dass u.a. sehr kleine Proben untersucht werden können (z.B. im Extremfall ein einzelnes Protein statt ein Proteinkristall), und in der kurzen Pulsdauer, mit der atomare Vorgänge auf der Femtosekunden-Skala zeitlich aufgelöst werden können.

Gegenüber Lasersystemen, die ebenfalls kurze und intensive Pulse erzeugen können, liegt der Vorteil von FELs in der kurzen und variablen Wellenlänge. Laser verstärken Licht durch stimulierte Emission, wobei das Lasermedium vorher „gepumpt“ wurde und sich die Mehrzahl der Atome in einem angeregten Zustand befinden (Inversion). Diese Atome sind also bereit, bei der Rückkehr zu einem energetisch niedrigeren Zustand Quanten einer bestimmten Wellenlänge abzugeben. Beim FEL dagegen ist die Energiequelle ein Strahl ungebundener („freier“) Elektronen, die eine hohe und variable Energiemenge abgeben können. Ein weiterer Unterschied zum Laser ist, dass der FEL-Prozess weitgehend im Rahmen der klassischen Elektrodynamik verstanden werden kann. Die folgende Darstellung lehnt sich an [10] und [23] an.

11.2 Wechselwirkung zwischen Licht und Elektronen – der Low-Gain-FEL

Die Verstärkung von Licht auf Kosten der kinetischen Energie von Elektronen erfolgt in einem Undulator, der durch die Periodenlänge λ_u und den Stärkeparameter K charakterisiert ist (s. Abschnitt 8.4). Der Austausch von Energie dW zwischen einem Elektron der Geschwindigkeit \vec{v} mit einem Lichtpuls ist gegeben durch

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -e \vec{E} \cdot d\vec{s} = -e \vec{E} \cdot \vec{v} dt = -e \left| \vec{E} \right| v_{\perp} dt, \quad (273)$$

wobei \vec{E} der stets senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichts orientierte elektrische Feldvektor ist und der Undulator dafür sorgt, dass es eine Geschwindigkeitskomponente v_{\perp} parallel zu \vec{E} gibt, so dass das Skalarprodukt ungleich null ist. Mit der Annahme horizontaler Polarisierung $E_x = E_0 \cos(ks - \omega t + \varphi_0)$ und $v_{\perp} = \dot{x}$ aus Gl. 260 ist die Energieänderung

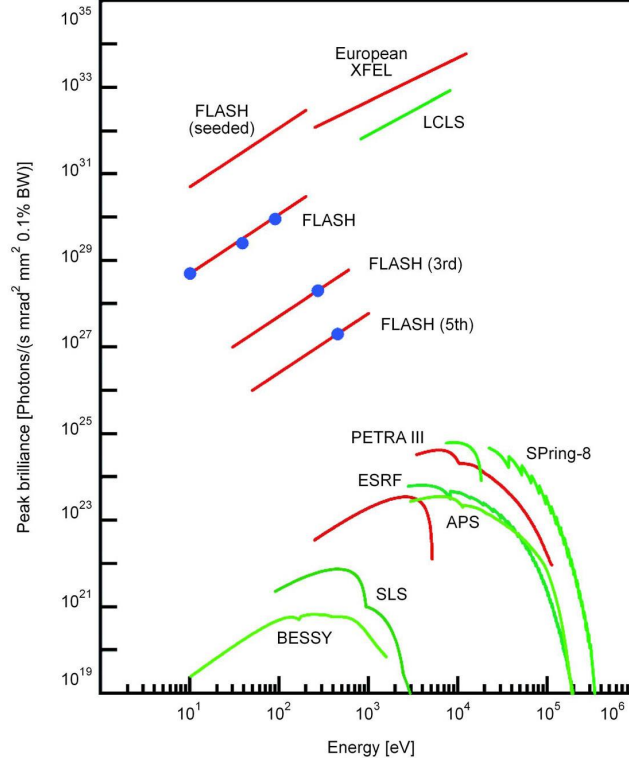


Abbildung 18: Spitzenbrillanz und Photonenergie bei Synchrotronstrahlungsquellen (APS, BESSY, ESRF, PETRA III, SLS, SPring-8) und FELs (FLASH, LCLS, XFEL). Die blauen Punkte sind Meßwerte.

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= -e E_o \cos(ks - \omega t + \varphi_o) \cdot \frac{cK}{\gamma} \sin(k_u s) \\
&= -\frac{ecE_o K}{2\gamma} \{ \sin([k + k_u]s - \omega t + \varphi_o) - \sin([k - k_u]s - \omega t + \varphi_o) \} \\
&\equiv -\frac{ecE_o K}{2\gamma} \{ \sin \Psi_+ - \sin \Psi_- \} .
\end{aligned} \tag{274}$$

Für eine kontinuierliche Energieänderung über alle Undulatorperioden sollten die hier definierten Phasen Ψ_{\pm} zeitlich konstant sein

$$\frac{d\Psi_{\pm}}{dt} = 0 = [k \pm k_u] \dot{s} - \omega = k(\dot{s} - c) \pm k_u \dot{s} \approx -kc \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} \pm k_u c, \tag{275}$$

wobei für \dot{s} die mittlere Geschwindigkeit β^* aus Gl. 265 angenommen wurde. Die Phase Ψ_+ ist

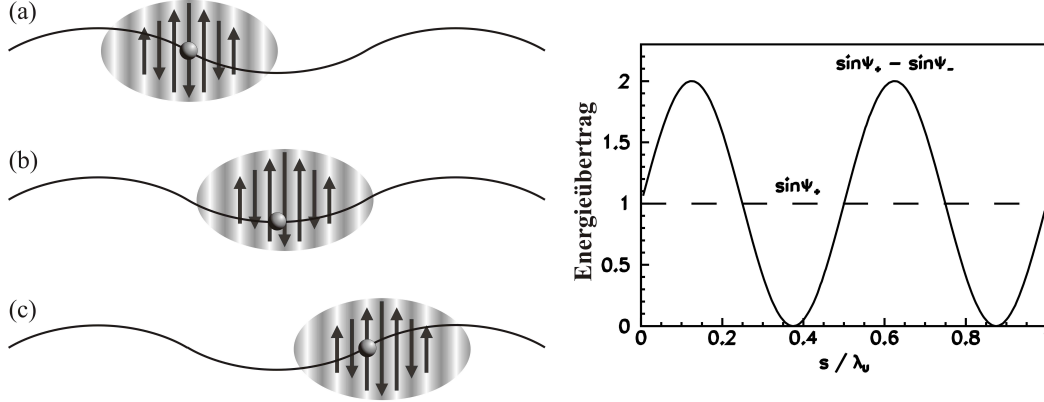


Abbildung 19: Ein kontinuierlicher Energieaustausch zwischen Elektron und Lichtfeld findet statt, wenn das Elektron pro Undulatorperiode um eine Wellenlänge zurückbleibt. Bei maximaler Auslenkung (2x pro Undulatorperiode) ist die Transversalgeschwindigkeit und damit der Energieübertrag null. In diesem Beispiel verliert das Elektron Energie ($-e\vec{E} \cdot \vec{v}$ negativ), während ein um eine halbe Wellenlänge verschobenes Elektron Energie gewinnen würde.

konstant, wenn die Wellenlänge der Bedingung

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{k_u 2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right) = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \quad (276)$$

genügt, also gleich der Wellenlänge der spontan emittierten Undulatorstrahlung ist (Gl. 268 mit $\Theta = 0$). Die andere Phase $\Psi_- = \Psi_+ - 2k_u s$ ist nicht konstant, vielmehr osziliert der Term $\sin \Psi_-$ zweimal pro Undulatorperiode. Dies trägt der Tatsache Rechnung, dass der Energieübertrag mit dem Betrag von v_\perp variiert und zweimal pro Periode maximal bzw. null wird (vgl. Abb. 19).

Die Energieänderung eines Elektrons hängt also von der Phase Ψ_+ (im Folgenden einfach Ψ) ab, die manchmal als „ponderomotorische Phase“ bezeichnet wird. Andererseits hängt auch die Phase von der Energie ab, denn wenn der Lorenzfaktor von Resonanzbedingung abweicht, gilt nicht mehr, dass das Elektron pro Undulatorperiode um genau eine Wellenlänge zurückbleibt. Die Differenz der Phasenänderungen aus Gl. 275 mit und ohne Abweichung $\Delta\gamma$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= -kc \frac{1 + K^2/2}{2} \left(\frac{1}{(\gamma + \Delta\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \approx -kc \frac{1 + K^2/2}{2} \left(\frac{\gamma^2 - (\gamma + \Delta\gamma)^2}{(\gamma + \Delta\gamma)^2 \gamma^2} \right) \\ &\approx -kc \frac{1 + K^2/2}{2} \left(\frac{-(2\gamma + \Delta\gamma)\Delta\gamma}{\gamma^4} \right) \approx k_u c \gamma^2 \left(\frac{2\Delta\gamma}{\gamma^3} \right) = 2k_u c \frac{\Delta\gamma}{\gamma}. \end{aligned} \quad (277)$$

Mit der Definition $\eta \equiv \Delta\gamma/\gamma$ und $dW/dt = \gamma m_e c^2 (d\eta/dt)$ wird die Bewegung eines Elektrons

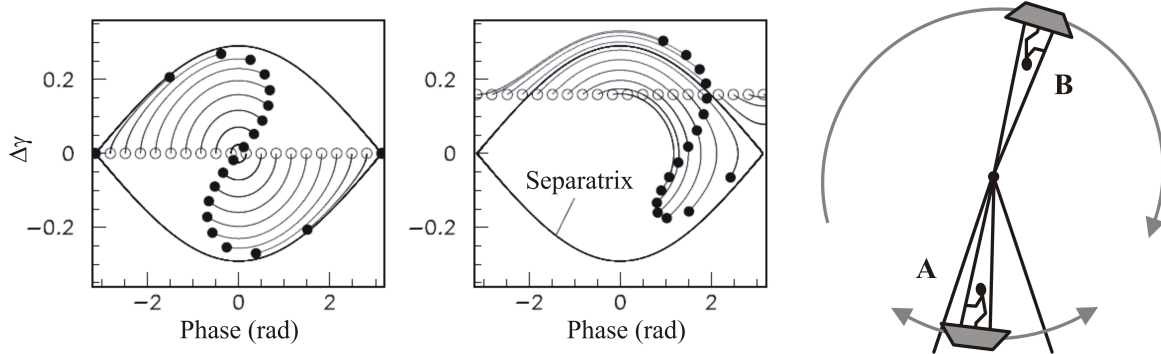


Abbildung 20: Phasenraumbewegung von Elektronen im Undulator unter dem Einfluss von Strahlung gemäß der Pendelgleichung. Kleine Bewegungen (A) entsprechen einem harmonischen Oszillator, Überschläge (B) sind außerhalb der Separatrix. Wenn die Elektronen anfangs mit $\Delta\gamma > 0$ von der Resonanzbedingung abweichen, ist der durchschnittliche Energieverlust größer als der Energiegewinn.

im Phasenraum (η, Ψ) durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen

$$\frac{d\Psi}{ds} = 2k_u\eta \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{eE_o K}{2m_e c^2 \gamma^2} \sin \Psi \quad (278)$$

beschrieben, wobei die Ableitungen nach $s \approx ct$ statt t angegeben wurden und der Term $\sin \Psi$ ignoriert wurde, da er im zeitlichen Mittel null ergibt. Diese Gleichungen können zur Pendelgleichung

$$\ddot{\Psi} + \Omega^2 \sin \Psi = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega^2 \equiv \frac{eE_o k_u K}{m_e \gamma^2} \quad (279)$$

kombiniert werden, deren Lösungen für kleine Abweichungen einem harmonischen Oszillator entsprechen und für große Abweichungen durch die sog. Separatrix begrenzt sind (s. Abb. 20). In dieser Ableitung wurde die longitudinale Geschwindigkeit \dot{s} durch eine mittlere Geschwindigkeit genähert. Durch die Modulation von \dot{s} gemäß Gl. 264 wird der Energieübertrag etwas geringer, was durch

$$K \longrightarrow K \cdot \left[J_0 \left(\frac{K^2}{4 + 2K^2} \right) - J_1 \left(\frac{K^2}{4 + 2K^2} \right) \right] = K \cdot JJ \quad (280)$$

berücksichtigt werden kann (ohne Beweis). Hierin sind J_0 und J_1 Bessel-Funktionen und der zusätzliche sogenannte JJ-Faktor liegt zwischen 0,7 und 1.

11.3 Low-gain-FELs

In Abb. 20 ist links die Elektronenbewegung für die Anfangsbedingung $\Delta\gamma = 0$ dargestellt. Über alle Elektronen gemittelt halten sich Energiegewinn und -verlust die Waage, d.h. es gibt insgesamt keinen Energieübertrag zwischen Elektronen und Strahlungsfeld. Wenn die Elektronen aber mit $\Delta\gamma > 0$ starten, wenn also γ etwas größer ist als nach Gl. 204 gefordert, überwiegt der Energieverlust und das Strahlungsfeld wird auf Kosten der Elektronenenergie verstärkt. Dies ist das Prinzip der *low-gain*-FELs. Der Verstärkungsfaktor (*gain*) ist klein, da der Gewinn (wenige Prozent) nur die Differenz zweier gegenläufiger Effekte ist. Bei dieser Argumentation wird allerdings die spontane Strahlung der Elektronen ignoriert. Die Gleichungen 278 enthalten keinen Strahlungsterm und die Amplitude E_o des elektrischen Feldes wird als nahezu konstant angenommen.

Beim *low-gain*-FEL baut sich das Strahlungsfeld langsam zwischen zwei Spiegeln während vieler Durchläufe von Elektronenpaketen durch den Undulator auf, s. Teil (a) von Abb. 21. Eine solche Anordnung wird wie beim konventionellen Laser „Oszillator“ genannt. Der Verstärkungsfaktor ist

$$g(\eta) = -\frac{\pi e^2 K^2 N_u^3 \lambda_u^2 n_e}{4 \varepsilon_0 m_e c^2 \gamma^3} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \quad \text{mit} \quad x \equiv 2\pi N \eta \quad (281)$$

wobei n_e die Elektronendichte ist und K gemäß Gl. 208 modifiziert wird. Der Faktor $\sin^2 x/x^2$ entspricht der spektralen Verteilung der Undulatorstrahlung. Dies ist die Aussage des sog. Madey-Theorems: Die *low-gain*-Verstärkung ist durch die Ableitung des Undulatorspektrums gegeben [53].

FEL-Oszillatoren werden mit Elektronenpaketen aus Linearbeschleunigern oder Speicherringen betrieben. Der Zweck vieler Anlagen ist die Erzeugung hochintensiver Strahlung im Infrarot-Bereich, z.B. FELBE in Dresden (Linearbeschleuniger mit zwei FELs für 4-200 μm Wellenlänge), andere erzeugen Licht im sichtbaren und UV-Bereich, z.B. die Speicherring-FELs bei DELTA in Dortmund (470 nm) und ELETTRA in Trieste/Italien (≥ 176 nm). Der Versuch, mit *low-gain*-FELs zu noch kürzeren Wellenlängen zu gelangen, scheitert daran, dass keine Spiegel ausreichender Reflektivität zur Verfügung stehen. Für kurze Wellenlängen muss der Aufbau des Strahlungsfeldes in einem einzigen Durchlauf durch den Undulator erfolgen, was einen höheren Verstärkungsfaktor erfordert.

11.4 Der High-Gain-FEL

Während beim *low-gain*-FEL die Amplitude E_o des elektrischen Feldes als nahezu konstant angenommen wurde, ist dies beim *high-gain*-FEL nicht mehr sinnvoll, da hier die gesamte Verstärkung in einem Durchlauf durch den Undulator erfolgt. Die gekoppelten Gleichungen 278 müssen um eine weitere Gleichung ergänzt werden, die hier nicht hergeleitet werden soll:

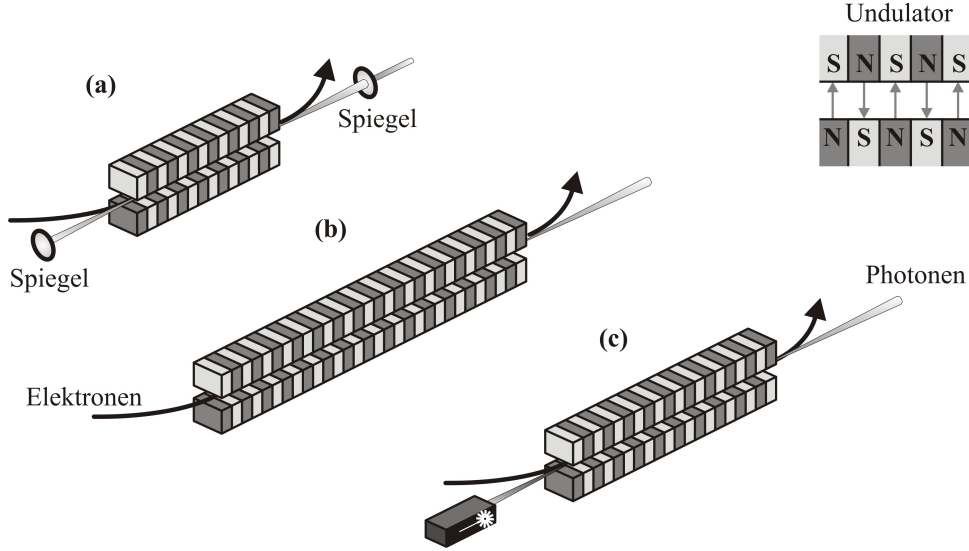


Abbildung 21: Schematische Darstellung verschiedener Typen von FELs. Low-gain-FELs sind Oszillatoren, bei denen sich das Strahlungsfeld zwischen zwei Spiegeln aufbaut (a), high-gain-FELs verstärken nach dem SASE-Prinzip (*self-amplified spontaneous emission*) entweder die spontane Strahlung am Anfang eines langen Undulators (b) oder einen externen Strahlungspuls (c), wobei es verschiedene Varianten dieses sog. *Seeding* gibt.

$$\frac{d\tilde{E}_o}{ds} = \frac{\mu_o K c^2 n_e e}{2\gamma} \langle e^{i\Psi_n} \rangle. \quad (282)$$

Hier ist n_e wieder die Elektronendichte und $\langle e^{i\Psi_n} \rangle$ ist der (komplexe) *bunching*-Faktor, wobei $\langle \dots \rangle$ bedeutet, dass über alle Elektronen gemittelt wird. Der *bunching*-Faktor ist größer als null, wenn die Phasen der Elektronen nicht gleich verteilt sind, sondern eine bestimmten Phase bevorzugt auftritt. In diesem Fall bewirkt die kohärente Abstrahlung eine Erhöhung des elektrischen Feldes, das hier als komplexe Zahl (angedeutet durch die Tilde) geschrieben wurde. Die nunmehr drei gekoppelten Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_n}{ds}(s) &= f_1 \cdot \eta_n(s) \\ \frac{d\eta_n}{ds}(s) &= f_2 \cdot \text{Re} \left\{ \tilde{E}_o(s) \cdot e^{i\Psi_n(s)} \right\} \\ \frac{e\tilde{E}_o}{ds}(s) &= f_3 \cdot \langle e^{i\Psi_n(s)} \rangle, \end{aligned} \quad (283)$$

können direkt zur Simulation der zeitlichen Entwicklung von Elektronenbewegung und elektri-

schem Feld verwendet werden (s. weiter unten). Die zweite Gleichung enthält üblicherweise noch einen zweiten Term, der Raumladungseffekte berücksichtigt, auf den hier aber verzichtet wurde. Die analytische Behandlung führt zu einer Gleichung dritter Ordnung für das elektrische Feld mit einer exponentiell steigenden, einer oszillierenden und einer exponentiell fallenden Lösung. Nach einer kurzen Strecke im Undulator ist nur noch der exponentielle Anstieg des Feldes und damit der Leistung von Interesse

$$P(s) \sim e^{s/L_g} \quad \text{mit} \quad L_g = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{4\gamma^3 m_e}{\mu_0 K^2 e^2 k_u n_e} \right)^{1/3}. \quad (284)$$

Die sog. *gain*-Länge L_g wird von dieser eindimensionalen Betrachtung deutlich überschätzt, da Einflüsse der Ausdehnung und Energiebreite des Strahls ignoriert wurden. Sättigung, d.h. keine weitere Verstärkung, tritt bei ca. $L_{\text{sat}} \approx 20L_g$ ein, wenn die Häufung der Elektronen bei einer bestimmten Phase (*micro bunching*) nicht mehr ausgeprägter wird. Eine nützliche Größe ist der FEL- oder Pierce-Parameter

$$\rho = \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}L_g}, \quad (285)$$

der in der Größenordnung von 10^{-3} liegt. Er kann einerseits als relative Verstärker-Bandbreite des FELs und andererseits als Kehrwert der Zahl der Undulatorperioden pro Sättigungslänge L_{sat} interpretiert werden.

Das Ergebnis der numerischen Berechnung der Gln. 211 in kleinen Schritten ds ist in Abb. 22 gezeigt, wobei die Strahlungsleistung proportional zu E_0^2 ist.

11.4.1 SASE (self-amplified spontaneous emission) und FEL-Seeding

Bisher wurde nicht auf die Frage eingegangen, woher eigentlich der Strahlungspuls kommt, der mit dem *high-gain*-FEL verstärkt wird. Die meisten bereits existierenden und geplanten FELs beruhen auf dem SASE-Prinzip (*self-amplified spontaneous emission*), bei dem der Strahlungspuls im ersten Teil eines langen Undulators als spontane Strahlung entsteht [54]. Man kann es auch so ausdrücken, dass das Rauschen der Elektronenverteilung eine Komponente innerhalb der Bandbreite des FEL-Verstärkers hat. Der Vorteil beim SASE-Verfahren ist, dass es sehr einfach und robust ist – der Prozess setzt „automatisch“ ein. Nachteilig ist, dass der Zufallsprozess zu Schwankungen in der zeitlichen und spektralen Verteilung sowie der Intensität führt. Innerhalb der Länge des FEL-Pulses bilden sich mehrere „Moden“ aus. Das sind Bereiche mit hoher longitudinaler Kohärenz, die aber innerhalb der FEL-Bandbreite verschiedene Frequenz und untereinander keine definierte Phase und haben. Man kann Pulse mit einer einzigen Mode durch die Erzeugung von Elektronenpaketen erzwingen, die kürzer als die Kohärenzlänge der Moden sind, was jedoch zurzeit nur mit sehr kleiner Paketladung gelingt.

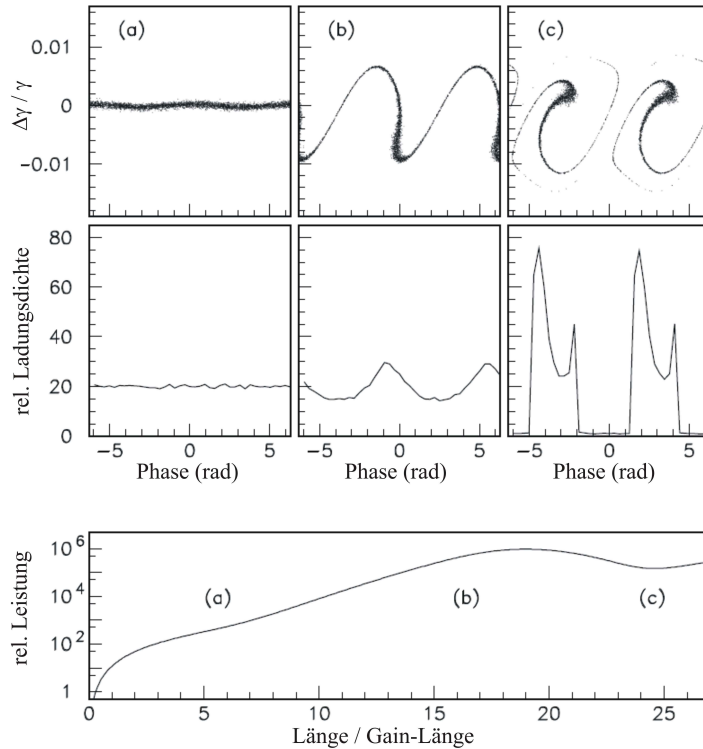


Abbildung 22: Numerische Berechnung der Gln. 283 in kleinen Schritten nach dem Runge-Kutta-Verfahren (ähnlich Abb. 22 in Teil 1 des Skripts). Oben ist die Phasenraumverteilung der Elektronen (a) am Anfang des Undulators, (b) während des Verstärkungsprozesses und (c) in Sättigung gezeigt. Unten ist als Maß für die Strahlungsleistung das Quadrat des elektrischen Felds als Funktion der Position im Undulator aufgetragen.

Die longitudinalen Eigenschaften von FEL-Strahlung könnten verbessert werden, wenn der FEL einen gut kontrollierbaren extern erzeugten Puls verstärken würde. Ein solches *Seeding* hat zudem für Anrege-Abfrage-Experimente den Vorteil der automatischen Synchronisation der FEL-Pulse mit einer externen Strahlungsquelle. Das Problem hierbei ist jedoch, dass möglichst kurzwellige FEL-Pulse angestrebt werden, während Laser als geeignete Quellen für *seed*-Pulse im sichtbaren oder Infrarot-Bereich liegen.

Verschiedene Verfahren wurden vorgeschlagen, mit denen man von einem langwelligen Laserpuls (z.B. Titan:Saphir mit 800 nm) zu einem kurzwelligen FEL-Puls gelangt. Zwei grundsätzliche Wege sind in Abb. 23 schematisch dargestellt:

- *Seeding* mit kurzwelligen Pulsen, die beim Durchflug intensiver Laserpulse durch ein Gas entstehen (*high-harmonic generation*, HHG)

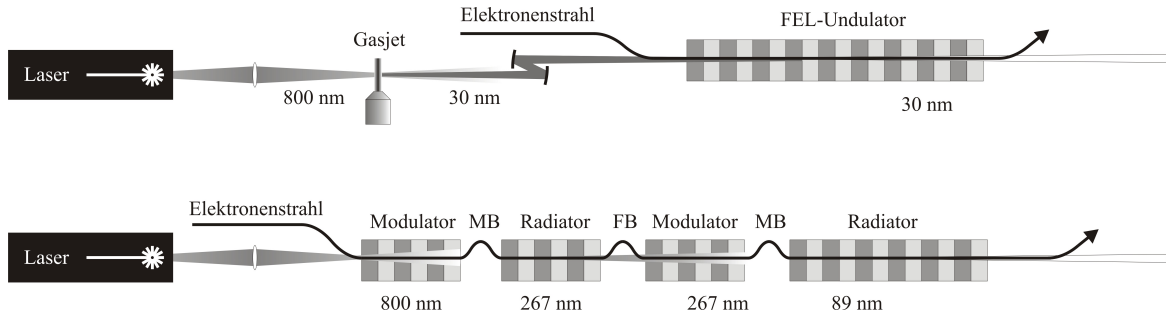


Abbildung 23: Zwei Verfahren zum *Seeding* im langwelligen Laserpuls mit dem Ziel, im FEL einen kurzwelligen Strahlungspuls zu verstärken. Oben erzeugt der Laserpuls beim Durchflug durch ein Gas kurzwellige Pulse, die direkt zum *Seeding* verwendet werden. Unten werden Harmonische eines langwelligen *Seed*-Pulses durch Energie- und Dichtemodulation erzeugt (s. Text).

- *Seeding* mit einem langwelligen Puls und Energiemodulation in einem Undulator, die durch eine Schikane (MB für *micro bunching*) in eine Dichtemodulation umgewandelt wird, so dass Harmonische des langwelligen Pulses kohärent emittiert werden (*high-gain harmonic generation*, HGHG – ähnlich zu CHG in Abschnitt 10.3).

Die Entwicklung solcher Verfahren ist ein aktueller Forschungsgegenstand. HHG-*Seeding* wurde erstmals an SCSS in Hyogo/Japan, inzwischen aber auch bei SPARC in Frascati/Italien und FLASH in Hamburg experimentell untersucht [55], ist aber für den Routinebetrieb noch zu instabil. HGHG wurde bereits in den 1990er Jahren am BNL in Brookhaven/USA demonstriert [56], verkürzt die Wellenlänge aber nur um einen Faktor 5 bis 10. Das „Kaskadieren“, bei dem die Strahlung einer Modulator/Radiator-Kombination für das *Seeding* einer weiteren Stufe verwendet wird, wurde inzwischen bei FERMI@ELETTRA in der Nähe von Trieste/Italien demonstriert [57]. Wie in Abb. 23 angedeutet, wird zwischen zwei solchen Stufen eine weitere Schikane (FB für *fresh bunch*) benötigt, damit für die zweite Stufe ein anderer longitudinaler Bereich eines ausgedehnten Elektronenpakets verwendet werden kann.

Ein weiteres Verfahren, das eventuell mit weniger Aufwand als HGHG zu kürzeren Wellenlängen führt, ist *echo-enabled harmonic generation* (EEHG), das bereits in Abschnitt 10.5 beschrieben wurde [39]. Eine zweifache Energiemodulation erzeugt hierbei eine komplexere Dichteverteilung mit hohen Harmonischen der *seed*-Wellenlänge. Es gibt vielversprechende Textexperimente [40, 41, 42], doch die Tauglichkeit des Verfahrens für den Routinebetrieb ist noch nicht erwiesen.

Ferner wird *Seeding* mit extrem kurzen Laserpulsen und wenigen optischen Zyklen (sog. *few-cycle*-Pulse) diskutiert, deren Phase bezüglich der Einhüllenden des Pulses (*carrier-envelope phase*, CEP) stabilisiert ist, um in FELs kurzwellige Strahlung mit Pulsdauern unter einer Femtosekunde zu erzeugen.

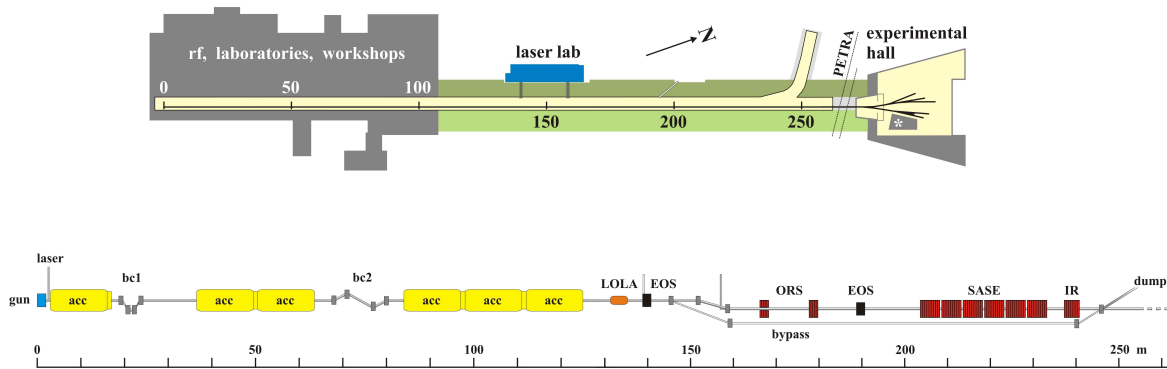


Abbildung 24: Schematische Darstellung des Freie-Elektronen-Lasers FLASH in Hamburg (Stand 2009). Die Anlage befindet sich teils in Gebäuden, teils unter einem Erdwall und ist ca. 300 m lang (oben). Wesentliche Bestandteile sind die Elektronenquelle (gun), supraleitende Beschleunigungsmodule (acc), Bunch-Kompressoren (bc), ein langer Undulator (SASE) und diverse Einrichtungen zur Strahldiagnose.

11.4.2 Technische Aspekte von High-Gain-FELs

Für den SASE-Prozess wird eine kleine Strahlemittanz und ein hoher Spitzenstrom im kA-Bereich benötigt. Die erforderlichen Parameter können in Speicherringen nicht erreicht werden, da dort Emittanz und Teilchenpaketlänge mit dem Gleichgewicht von Aufheizung und Dämpfung durch Synchrotronstrahlung festgelegt sind. Ein SASE-FEL erfordert demnach einen Linearbeschleuniger mit besonderen Eigenschaften. Die technologischen Voraussetzungen zum Betrieb eines SASE-FEL sollen am Beispiel von FLASH in Hamburg diskutiert werden. Abbildung 24 zeigt die Anlage schematisch vor dem Umbau im Jahr 2010, bei dem im Abschnitt 160-200 m ein *Seeding*-Experiment installiert wurde (sFLASH). Wesentliche Bestandteile und technologische Herausforderungen sind [23]

- Photokathoden-Hf-Elektronenquelle: Um bereits an der Quelle relativ kurze Elektronenpakete (einige ps) mit kleiner Emittanz zu erzeugen, muss der Einfluss der Raumladung (Coulomb-Abstoßung der Elektronen) minimiert werden, indem die Elektronenpakete rasch auf relativistische Energie gebracht werden. Hier werden die Elektronen nicht thermisch, sondern durch kurze Laserpulse aus der Kathode herausgelöst und sofort mit einem starken elektrischen Feld beschleunigt, da sich die Kathode direkt in einem Hf-Resonator befindet.
- Supraleitende Beschleunigungs-Module: Supraleitende Hf-Resonatoren wurden in Teil 1 des Skripts diskutiert. Die bei FLASH verwendeten Module enthalten acht 9-zellige TESLA-Resonatoren und werden mit Gradienten um 25 MV/m betrieben.
- *Bunch*-Kompressoren: Um Spitzenströme im kA-Bereich zu erreichen, werden die Elektronenpakete nach dem in Abschnitt 4.6 (Teil 1 des Skripts) dargestellten Prinzip weiter

komprimiert und haben schließlich eine Länge von wenigen 10 fs.

- Undulatoren: SASE-FELs benötigen lange Undulatoren. Im Beispiel von FLASH sind dies sechs Module zu je 4,5 m, bestehend aus NdFeB-Permanentmagneten mit festem Magnetspalt (12 mm) und Periodenlänge 27,3 mm (bei FELs im Röntgenbereich sind die Undulatoren 100 bis 200 m lang).
- Strahldiagnose: Neuartige Methoden der Strahldiagnose wurden entwickelt, um den Elektronenstrahl und die FEL-Strahlung zu charakterisieren. Insbesondere liegt die Elektronenpaketlänge im Femtosekundenbereich und ist mit der in Speicherringen nicht vergleichbar. Eine Methode der longitudinalen Strahldiagnose besteht in der Anwendung eines transversal ablenkenden Hf-Resonators. Mit einer TM_{110} -Mode werden der vordere und der hintere Teil des Elektronenpakets in entgegengesetzte Richtung abgelenkt. Auf einem Leuchtschirm (z.B. durch Übergangsstrahlung) erscheint ein longitudinales Abbild des Pakets. Wenn die Elektronen zusätzlich mit einem Dipolmagneten nach ihrer Energieverteilung aufgefächert werden, entsteht eine Darstellung des longitudinalen Phasenraums.
- Synchronisation: Verschiedene Teile der Anlage müssen präzise zueinander synchronisiert werden – Elektronenquelle, Beschleunigungsmodule, Diagnose-Instrumente, Laser für *Seeding*- und Anrege-Abfrage-Instrumente. Dies erfordert zunächst einen präzisen Taktgeber, aber auch Möglichkeiten, Signale über mehrere 100 m mit festgelegter Laufzeit zu übertragen. Hierfür haben sich Faserlaser bewährt, deren Signale mit optischen Fasern zum Zielort geführt und dort teils reflektiert werden, um die Laufzeit zu messen und auf der Femtosekunden-Skala zu regeln.
- Laser: Moderne Lasertechnologie spielt bei Teilchenbeschleunigern eine immer größere Rolle. So werden z.B. bei FLASH Laser für die Elektronenquelle, für die Synchronisation und verschiedene Diagnosemethoden, für ein *Seeding*-Experiment und für Anrege-Abfrage-Experimente verwendet. Eine besondere technologische Herausforderung ist hier die Abfolge der Elektronenpakete in Gruppen von bis zu 800 Paketen bei einer Wiederholrate von 10 Hz, während Lasersysteme üblicherweise für äquidistante Pulse ausgelegt sind.

11.5 „Energy-recovery“-Linearbeschleuniger

Abschließend soll eine weitere Klasse potenzieller Synchrotronstrahlungsquellen kurz erwähnt werden, sogenannte *energy-recovery*-Linearbeschleuniger (ERL). Ein Vorteil von Elektronenspeicherringen ist der Strahlstrom, der – da jedes Elektronenpaket pro Sekunde millionenfach wiederkehrt – problemlos mehrere 100 mA betragen kann, was für einen konventionellen Linearbeschleuniger nicht denkbar ist. Die Beschleunigung auf 1 GeV würde bei einem durchschnittlichen Strom von 100 mA eine ständige Leistungszufuhr von 100 MW erfordern! Ein anderer Vorteil von Speicherringen ist die Vielzahl von Experimentierplätzen, die gleichzeitig bedient werden können.

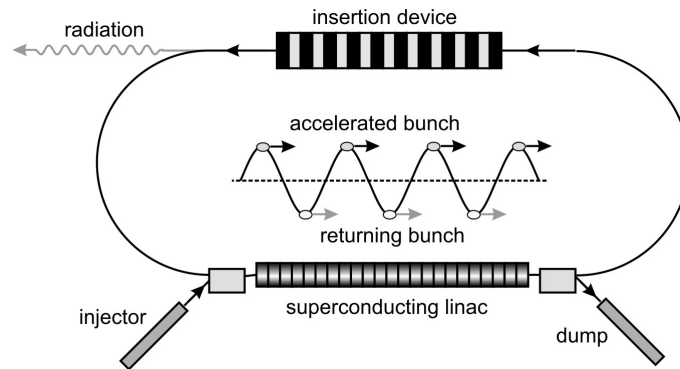


Abbildung 25: Schematische Darstellung eines *energy-recovery linac* (ERL), bei dem der beschleunigte Strahl einen supraleitenden Linearbeschleuniger ein zweites Mal durchläuft und seine Energie wieder an das Hf-Feld abgibt.

Andererseits sind Emittanz und Pulsdauer in Speicherringen festgelegt, während mit Linearbeschleunigern bessere Werte erzielt werden können. Das ERL-Prinzip [58] (Abbildung 25) erlaubt, mit supraleitenden Linearbeschleunigern Elektronenpakete mit einer Wiederholrate zu beschleunigen, die mit Pulsfolge in Speicherringen vergleichbar ist, sodass ein hoher Durchschnittsstrom erzielt wird. Hierbei durchläuft jedes Elektronenpaket den Beschleuniger zweimal, wobei es zuerst beschleunigt wird und im zweiten Durchlauf bei entgegengesetzter Hf-Phase seine Energie wieder an das Hf-Feld der Resonatoren abgibt. Zwischen den beiden Durchläufen kann der Strahl – wie bei Speicherringen – mehrere Experimente mit Undulatorstrahlung bedienen. Durch die minimale Endenergie wird zudem das Problem der Radioaktivität im sog. *beam dump* (der Absorber, in den der Strahl eines Linearbeschleunigers endet) entschärft.

ERLs werden bereits verwendet, um FEL-Oszillatoren im Infrarot-Bereich zu betreiben, z.B. am Jefferson Lab in Newport News/USA. ERLs für Strahlungsquellen im UV- und Röntgenbereich existieren noch nicht, werden aber an verschiedenen Labors diskutiert, z.B. am KEK in Tsukuba/Japan, an der Cornell University in Ithaca/USA, aber auch am HZB in Berlin. Im Vergleich zu konventionellen Synchrotronstrahlungsquellen verspricht man sich bei hohem Strahlstrom eine kleinere Emittanz und damit höhere Brillanz (wenngleich nicht so hoch wie bei FELs) sowie kürzere Pulsdauer.

Literatur

- [1] D. Attwood, *Soft X-rays and Extreme Ultraviolet Radiation* Cambridge University Press (1999).
- [2] J. Als-Nielsen, D. McMorrow, *Elements of Modern X-Ray Physics*, John Wiley & Sons (2001).
- [3] J. Falta, T. Möller, *Forschung mit Synchrotronstrahlung*, Vieweg+Teubner (2010).
- [4] E. M. Rowe, F. E. Mills, *Tantalus I: A Dedicated Storage Ring Synchrotron Radiation Source*, Particle Accelerators 4 (1973), 211.
- [5] J. Brau et al. (Eds.), *International Linear Collider Reference Design Report*, ILC-Report-2007-001, www.linearcollider.org.
- [6] J. Ellis, I. Wilson, *New physics with the Compact Linear Collider*, Nature 409 (2001), 431.
- [7] S. Turner (Ed.) *CERN Accelerator School – Vacuum Technology*, CERN-05-99, cds.cern.ch.
- [8] M. Sands, *The Physics of Electron Storage Rings: An Introduction*, SLAC-Report-121, www.slac.stanford.edu/pubs.
- [9] R. Chasman, K. Green, BNL 50505 (1980), Brookhaven National Laboratory.
- [10] K. Wille, *Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen*, Teubner (1996).
- [11] T. Shintake, *A New Mathematical Method for Radiation Field of Moving Charge*, Proc. of the Europ. Part. Accel. Conf. 2002, Paris, France, 1667, www.jacow.org.
- [12] M. S. Longair, *High Energy Astrophysics*, Cambridge University Press (1981).
- [13] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (3. edition) John Wiley & Sons (1999).
- [14] H. Wiedemann, *Synchrotron Radiation* Springer (2003)
- [15] A. Hofmann, *The Physics of Synchrotron Radiation*, Cambridge University Press (2004).
- [16] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1970).
- [17] H. Onuki, P. Elleaume, *Undulators, Wigglers and their Applications*, Taylor & Francis (2003).

- [18] J. A. Clarke, *The Science and Technology of Undulators and Wigglers*, Oxford University Press (2004).
- [19] H. Motz, W. Thon, R. N. Whitehurst, *Experiments on Radiation by Fast Electron Beams*, Journal of Applied Physics 24, 826 (1953).
- [20] K. Halbach, *Design of Permanent Multipole Magnets with Oriented Rare Earth Cobalt Material*, Nuclear Instruments and Methods 169, 1 (1980).
- [21] C. Rullière, *Femtosecond Laser Pulses*, Springer (2003).
- [22] T. Brabec, F. Krausz, *Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics*, Review of Modern Physics 72, 545 (2000).
- [23] P. Schmüser, M. Dohlus, J. Rossbach, C. Behrens, *Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime*, Springer (2014).
- [24] S. Khan, *Ultrashort Pulses from Synchrotron Radiation Sources*, in: E. Jaeschke, S. Khan, J. R. Schneider, J. B. Hastings (Eds.), *Synchrotron Light Sources and Free-Electron Lasers*, Springer (2015).
- [25] M. Abo-Bakr et al., *Steady-State Far-Infrared Coherent Synchrotron Radiation detected at BESSY II*, Physical Review Letters 88, 254801 (2002).
- [26] J. Feikes et al., *Metrology Light Source: The first electron storage ring optimized for generating coherent THz radiation*, Physical Review Special Topics – Accelerators and Beams 14, 030705 (2011).
- [27] A.-S. Müller et al., *Beam Studies with Coherent Synchrotron Radiation from Short Bunches in the ANKA Storage Ring*, Proceedings of the European Particle Accelerator Conference 2006, Edinburgh, Scotland, 2868.
- [28] G. Wüstefeld, A. Jankowiak, J. Knobloch, M. Ries, *Simultaneous long and short electron bunches in the BESSY II storage ring*, Proceedings of the International Particle Accelerator Conference 2011, San Sebastian, Spain, 2936.
- [29] A. Zholents, P. Heimann, M. Zolotarev, J. Byrd, *Generation of subpicosecond X-ray pulses using RF orbit deflection*, Nuclear Instruments and Methods A 425, 385 (1999).
- [30] M. Borland, *Simulation and analysis of using deflecting cavities to produce short x-ray pulses with the Advanced Photon Source*, Physical Review Special Topics – Accelerators and Beams 8, 074001 (2005).
- [31] W.P. Leemans et al., *X-Ray Based Subpicosecond Electron Bunch Characterization Using 90° Thomson Scattering*, Physical Review Letters 77, 4182 (1996).

- [32] R.W. Schoenlein et al., *Generation of femtosecond pulses of synchrotron radiation*, Science 287, 2237 (2000).
- [33] S. Khan, K. Holldack, T. Kachel, R. Mitzner, T. Quast, *Femtosecond Undulator Radiation from Sliced Electron Bunches*, Physical Review Letters 97, 074801 (2006).
- [34] A. A. Zholents, M. S. Zolotarev, *Femtosecond X-Ray Pulses of Synchrotron Radiation*, Physical Review Letters 76, 912 (1996).
- [35] B. Girard et al., *Optical Frequency Multiplication by an Optical Klystron* Physical Review Letters 53, 2405 (1984).
- [36] M. Labat et al., *Coherent Harmonic Generation on UVSOR-II Storage Ring*, European Physical Journal D 44, 187 (2007).
- [37] G. De Ninno et al., *Generation of Ultrashort Coherent Vacuum Ultraviolet Pulses Using Electron Storage Rings*, Physical Review Letters 101, 053902 (2008).
- [38] S. Khan et al., *Generation of Ultrashort and Coherent Synchrotron Radiation Pulses at DELTA*, Synchrotron Radiation News 26(3), 25 (2013).
- [39] G. Stupakov, *Using the Beam-Echo Effect for Generation of Short-Wavelength Radiation*, Physical Review Letters 102, 074801 (2009).
- [40] D. Xiang et al., *Evidence of High Harmonics from Echo-Enabled Harmonic Generation for Seeding X-Ray Free Electron Laser*, Physical Review Letters 108, 024802 (2012).
- [41] Z.T. Zhao et al., *First lasing of an echo-enabled harmonic generation free-electron laser*, Nature Photonics 6, 360 (2012).
- [42] E. Hemsing et al., *Echo-enabled harmonics up to the 75th order from precisely tailored electron beams*, Nature Photonics 10, 512 (2016).
- [43] K. Holldack, S. Khan, R. Mitzner, T. Quast, *Femtosecond Terahertz Radiation from Femtoslicing at BESSY*, Physical Review Letters 96, 054801 (2006).
- [44] C. Mai et al., *Observation of coherent pulses in the sub-THz range at DELTA*, Proceedings of the International Particle Accelerator Conference 2015, Richmond, VA, USA, 823.
- [45] S. Bielawski et al., *Tunable narrowband terahertz emission from mastered laser-electron beam interaction*, Nature Physics 4, 390 (2008).
- [46] P. Ungelenk et al., *Continuously tunable narrowband pulses in the THz gap from laser-modulated electron bunches in a storage ring*, Physical Review Accelerators and Beams 20, 020706 (2017).

- [47] D. A. G. Deacon et al., *First Operation of a Free-Electron Laser*, Physical Review Letters 38, 892 (1977).
- [48] R. M. Phillips, *History of the Ubitron*, Nuclear Instruments and Methods A 272, 1 (1988).
- [49] W. Ackermann et al., *Operation of a free-electron laser from the extreme ultraviolet to the water window*, Nature Photonics 1, 336 (2007).
- [50] P. Emma et al., *First lasing and operation of an angstrom-wavelength free-electron laser*, Nature Photonics 4, 641 (2010).
- [51] T. Ishikawa et al., *A compact X-ray free-electron laser emitting in the sub-angstrom region*, Nature Photonics 6, 540 (2012).
- [52] E. Allaria et al., *Highly coherent and stable pulses from the FERMI seeded free-electron laser in the extreme ultraviolet*, Nature Photonics 6, 699 (2012).
- [53] J. M. J. Madey, *Relationship between mean radiated energy, mean squared radiated energy and spontaneous power spectrum in a power series expansion of the equations of motion in a free-electron laser*, Il Nuovo Cimento B50, 64 (1979).
- [54] A. M. Kondratenko, E. L. Saldin, *Generation of Coherent Radiation by a Relativistic Electron Beam in an Undulator*, Particle Accelerators 10, 207 (1980).
- [55] S. Ackermann et al., *Generation of Coherent 19- and 38-nm Radiation at a Free-Electron Laser Directly Seeded at 38 nm*. Physical Review Letters 111, 114801 (2013).
- [56] L.-H. Yu et al., *High-gain harmonic-generation free-electron laser*, Science 289, 932 (2000).
- [57] E. Allaria et al., *Two-stage seeded soft-X-ray free-electron laser*, Nature Photonics 7, 913 (2013).
- [58] M. Tigner, *A possible apparatus for electron clashing-beam experiments*, Il Nuovo Cimento 37, 1228 (1965).