Physik II — SoSe 2018
14. Übungsblatt

Ausgabe: 10.07.2018
Abgabe: 17.07.2018, 12 Uhr

Prof. Dr. Shaukat Khan
Prof. Dr. Götz S. Uhrig

Aufgabe 0: Verständnisfragen — 0 Punkte

1) Klassifizieren Sie die Folgenden Ausdrücke als Skalar, Vektor oder Tensor n-ter Stufe.
   (i) x_μ
   (ii) $x_\mu x^\mu$
   (iii) $x_\mu x^\nu$
   (iv) ${\Lambda^\sigma}_\rho g_{\sigma\nu} x^\mu \delta^\nu_\mu \Lambda_{\alpha\beta}$
2) Eine Eisenkugel fällt durch ein senkrechtes Aluminiumrohr. Was ändert sich, wenn die Kugel magnetisiert ist? Warum?
3) Was sind die Postulate, auf denen die Spezielle Relativitätstheorie basiert?
4) Beschreiben Sie in Worten, was passiert, wenn ein Kondensator durch eine Spule, deren Ohmscher Widerstand vernachlässigbar sei, entladen wird.

Musterlösung:

1) Hierbei müssen lediglich die "freien" also in der Summenkonvention nicht als Summe verarbeiteten Indizes gezählt werden.
   (i) Vektor
   (ii) Skalar
   (iii) Tensor 2ter Stufe
   (iv) Tensor 3ter Stufe:

$$
\begin{aligned}
{\Lambda^\sigma}_\rho g_{\sigma\nu} x^\mu \delta^\nu_\mu \Lambda_{\alpha\beta} &= {\Lambda^\sigma}_\rho g_{\sigma\nu} x^\nu \Lambda_{\alpha\beta} && (1)\\
&= {\Lambda^\sigma}_\rho x_\sigma \Lambda_{\alpha\beta} && (2)\\
&= x'_\rho \Lambda_{\alpha\beta} && (3)\\
&=: A_{\rho\alpha\beta} && (4)
\end{aligned}
$$

2) Die Kugel fällt langsamer, da das Magnetfeld im Aluminiumrohr Wirbelströme erzeugt, die wiederum Magnetfelder zur Folge haben, welche der Ursache ihrer Erzeugung, also dem Fallen der Kugel, entgegenwirken.
3) (i) **Konstanz der Lichtgeschwindigkeit**: Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert.
   (ii) **Relativitätsprinzip**: Alle physikalischen Gesetze lauten in allen Inertialsystemen gleich.
4) Es entsteht ein Schwingkreis. Durch das Entladen am Kondensator entsteht ein zeitabhängiger Strom, der nach dem Induktionsgesetz an der Spule ein entgegengesetztes Magnetfeld aufbaut. Wenn der Kondensator entladen ist, kann auch kein Magnetfeld mehr induziert werden. Das Magnetfeld wird also nun kleiner und induziert damit allerdings einen (erneut entgegengesetzten, also wieder in die urspüngliche Richtung gepolten) Strom der den Kondensator auflädt. Da alle Ohmschen Widerstände vernachlässigbar sind, wiederholt sich dieser Prozess für immer und es resultiert ein Schwingkreis.

Aufgabe 1: Lorentztransformation **5 Punkte**

Im Folgenden wird die Summenkonvention verwendet.

(a) Berechnen Sie $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$

(b) Berechnen Sie $x_\mu x_\nu g^{\mu\nu}$

(c) Multiplizieren Sie zwei Lorentztransformationen, die in die x-Richtung boosten. Nutzen Sie aus, dass daraus eine dritte Lorentztransformation folgen muss, um die relativistische Geschwindigkeitsaddition herzuleiten.

Musterlösung:

(a)

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = g_\mu{}^\mu = \delta^\mu_\mu = 1+1+1+1 = 4 \tag{5}$$

oder alternativ

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= g_{\nu\mu}g^{\mu\nu} = (g\cdot g)_\nu{}^\nu = \mathrm{Sp}(g\cdot g) \qquad (6)\\ &= \mathrm{Sp}\left[\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\right] \qquad (7)\\ &= \mathrm{Sp}(\mathbb{1}) = 4 \qquad (8)\end{aligned}$$

(b)

$$x_\mu x_\nu g^{\mu\nu} = x_\mu x^\mu = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2 \mathrel{\hat{=}} \text{relat. Abstand} \tag{9}$$

(c)

$$\begin{aligned} \Lambda_1\Lambda_2 &= \begin{pmatrix}\gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0\\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 & 0\\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad (10)\\ &= \begin{pmatrix}\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & -\gamma_1\gamma_2\beta_2-\gamma_1\gamma_2\beta_1 & 0 & 0\\ -\gamma_1\gamma_2\beta_2-\gamma_1\gamma_2\beta_1 & \gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad (11)\\ &\overset{!}{=} \begin{pmatrix}\gamma_3 & -\gamma_3\beta_3 & 0 & 0\\ -\gamma_3\beta_3 & \gamma_3 & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \Lambda_3 \qquad (12)\end{aligned}$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \qquad (13)\\ -\gamma_3\beta_3 &= -\gamma_1\gamma_2\beta_2-\gamma_1\gamma_2\beta_1 = -\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) \qquad (14)\end{aligned}$$

Durch Teilen von (14) durch (13) folgt:

$$\frac{-\gamma_3\beta_3}{\gamma_3} = \frac{-\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2)}{\gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)} \tag{15}$$

$$\Rightarrow \beta_3 = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \frac{v_3}{c} = \frac{\frac{v_1}{c}+\frac{v_2}{c}}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}} \tag{17}$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}} \tag{18}$$

Aufgabe 2: Aus B mach E — 5 Punkte

Um das elektromagnetische Feld in der vierdimensionalen Raumzeit auszudrücken, verwendet man den elektromagnetischen Feldstärketensor:

$$F^{\mu\nu} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}\right]^{\mu\nu} . \tag{19}$$

(a) Verwenden Sie die Relation

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}F^{\mu\nu}, \tag{20}$$

um das Transformationsverhalten für das E- und B-Feld herzuleiten. Es wird die Summenkonvention verwendet. Nutzen Sie einen Boost entlang einer Koordinatenachse, zum Beispiel die x-Achse.

Kontrollergebnis:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \tag{21}$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \tag{22}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \tag{23}$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E})_{\perp} \tag{24}$$

Betrachten Sie im Folgenden eine Punktladung mit Ladung q, die im Laborsystem durch ein Magnetfeld der Stärke B fliegt. Gravitative Effekte werden vernachlässigt.

(b) Wie lautet die auf die Punktladung wirkende Gesamtkraft im Laborsystem?

(c) Wie lautet die auf die Punktladung wirkende Gesamtkraft im Ruhesystem der Ladung?

Musterlösung:

(a) Wir verwenden einen Boost in x-Richtung, also $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Zunächst berechnen wir die Parallelkomponente des E-Feldes.

$$-\frac{1}{c}E'_x = F'^{01} = \Lambda^0{}_{\mu}\Lambda^1{}_{\nu}F^{\mu\nu} \tag{25}$$

$$= \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_0F^{00} + \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1F^{01} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0F^{10} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_1F^{11} \tag{26}$$

$$= \gamma(-\gamma\beta)\cdot 0 + \gamma^2(-\frac{1}{c}E_x) + (-\gamma\beta)(-\gamma\beta)\frac{1}{c}E_x + (-\gamma\beta)\gamma\cdot 0 \tag{27}$$

$$= -\frac{1}{c}E_x(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2) = -\frac{1}{c}E_x\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = -\frac{1}{c}E_x \tag{28}$$

Es folgt also $E'_x = E_x$ und $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$. Nun folgen die senkrechten Komponenten des E-Feldes.

$$-\frac{1}{c}E'_y = F'^{02} = \Lambda^0{}_{\mu}\Lambda^2{}_{\nu}F^{\mu\nu} \tag{29}$$

$$= \Lambda^0{}_0\Lambda^2{}_2F^{02} + \Lambda^0{}_1\Lambda^2{}_2F^{12} \tag{30}$$

$$= \gamma\cdot 1\cdot(-\frac{1}{c}E_y) + (-\gamma\beta)(-B_z) \tag{31}$$

$$= -\frac{\gamma}{c}(E_y - vB_z) = -\frac{1}{c}\gamma(E_y + (\vec{v}\times\vec{B})_y) \tag{32}$$

$$\Rightarrow E'_y = \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})_y \tag{33}$$

Und nun z.

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{c}E'_z = F'^{03} &= \Lambda^0{}_\mu \Lambda^3{}_\nu F^{\mu\nu} && (34)\\
&= \Lambda^0{}_0 \Lambda^3{}_3 F^{03} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^3{}_3 F^{13} && (35)\\
&= \gamma \cdot 1 \cdot (-\frac{1}{c}E_z) + (-\gamma\beta)B_y && (36)\\
&= -\frac{\gamma}{c}(E_z + vB_y) = -\frac{1}{c}\gamma(E_z + (\vec{v}\times\vec{B})_z) && (37)\\
\Rightarrow E'_z &= \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})_z && (38)\\
\Rightarrow \vec{E}_\perp &= \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})_\perp && (39)
\end{aligned}
$$

Weiter geht es mit der Berechnung des B-Feldes.

$$
\begin{aligned}
B'_x = F^{32} &= \Lambda^3{}_\mu \Lambda^2{}_\nu F^{\mu\nu} && (40)\\
&= \Lambda^3{}_3 \Lambda^2{}_2 F^{32} && (41)\\
&= 1 \cdot 1 \cdot B_x && (42)\\
\Rightarrow B'_x &= B_x && (43)\\
\Rightarrow \vec{B}'_\parallel &= \vec{B}_\parallel && (44)
\end{aligned}
$$

Nun die y-Komponente.

$$
\begin{aligned}
B'_y = F'^{13} &= \Lambda^1{}_\mu \Lambda^3{}_\nu F^{\mu\nu} && (45)\\
&= \Lambda^1{}_0 \Lambda^3{}_3 F^{03} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^3{}_3 F^{13} && (46)\\
&= (-\gamma\beta)\cdot(-\frac{1}{c}E_z) + \gamma B_y && (47)\\
&= \gamma(B_y + \frac{1}{c^2}vE_z) = \gamma(B_y - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})_y) && (48)\\
\Rightarrow B'_y &= \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E})_y && (49)
\end{aligned}
$$

Nun die z-Komponente.

$$
\begin{aligned}
B'_z = F'^{21} &= \Lambda^2{}_\mu \Lambda^1{}_\nu F^{\mu\nu} && (50)\\
&= \Lambda^2{}_2 \Lambda^1{}_0 F^{20} + \Lambda^2{}_2 \Lambda^1{}_1 F^{21} && (51)\\
&= (-\gamma\beta)\cdot(\frac{1}{c}E_y) + \gamma B_z && (52)\\
&= \gamma(B_z - \frac{1}{c^2}vE_y) = \gamma(B_z - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})_z) && (53)\\
\Rightarrow B'_z &= \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E})_z && (54)\\
\Rightarrow \vec{B'}_\perp &= \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E})_\perp && (55)
\end{aligned}
$$

(b) Die Gesamtkraft entspricht der Lorentzkraft:

$$\vec{F} = q\cdot(\underbrace{\vec{E}}_{=0} + \vec{v}\times\vec{B}) = q\vec{v}\times\vec{B} \qquad (56)$$

(c) Die Gesamtkraft entspricht der Lorentzkraft. Beachte, dass nun (im Ruhesystem) die Geschwindigkeit des Teilchens $\vec{v}'$ Null ist. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist die Geschwindigkeit des Boosts und damit die Geschwindigkeit des Teilchens im Laborsystem, da es sich um eine Transformation in genau die Bewegung des Teilchens handelt.

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \underbrace{\vec{v}'}_{=0}\times\vec{B}') = q\vec{E}' = q(\underbrace{\vec{E}_\parallel}_{=0} + \gamma(\underbrace{\vec{E}_\perp}_{=0} + (\vec{v}\times\vec{B})_\perp)) = \gamma q(\vec{v}\times\vec{B})_\perp \qquad (57)$$

Da das Kreuzprodukt $\vec{v} \times \vec{B}$ sowieso nur Beiträge hat, die senkrecht auf der Boostrichtung $\vec{v}$ stehen, gilt:

$$(\vec{v} \times \vec{B})_\perp = \vec{v} \times \vec{B} \tag{58}$$

$$\Rightarrow \vec{F}' = \gamma q \vec{v} \times \vec{B} \tag{59}$$

$$= \gamma \vec{F} \tag{60}$$

Aufgabe 3: Kugelkondensator **3 Punkte**

Betrachten Sie einen Kondensator, der aus zwei konzentrischen Kugeln mit Radien R_1 und R_2 besteht. Die Kugelschalen tragen Ladung Q und $-Q$.

(a) Leiten Sie das elektrische Feld in allen drei Bereichen aus dem Gaußschen Gesetz her.

(b) Wie groß ist die gespeicherte Ladung, wenn Sie an einen solchen (anfangs ungeladenen) Kondensator mit $R_1 = 1$ cm und $R_2 = 3$ cm eine Spannung von 1000 V anlegen?

Musterlösung:

(a) Das E-Feld zeigt aus Symmetriegründen in $\vec{e}_r$-Richtung und steht damit senkrecht auf der zu integrierenden Fläche:

$$\int \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{eingeschlossen}}}{\varepsilon_0} \tag{61}$$

$$E\vec{e}_r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi R^2 \cos(\theta)\vec{e}_r = \frac{Q_{\text{eingeschlossen}}}{\varepsilon_0} \tag{62}$$

$$\Leftrightarrow E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q_{\text{eingeschlossen}}}{\varepsilon_0} \tag{63}$$

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & R_2 < r \end{cases} \tag{64}$$

(b) Eine angelegte Spannung von 1000 V entspricht also einer Potenzialdifferenz von 1000 V. Die Potenzialdifferenz lautet hier:

$$U = \Delta\Phi = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{65}$$

Daraus folgt:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 U \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{66}$$

$$\approx 1.7 \text{ nC} \tag{67}$$

Aufgabe 4: Stromkreis mit Batterie — 4 Punkte

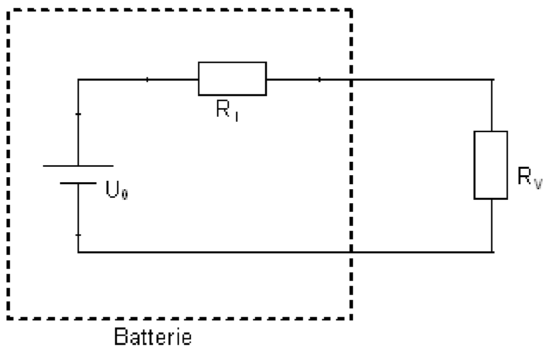
Eine Batterie mit einer Quellenspannung von 12 V wird mit einem Verbraucher verbunden, dessen Widerstand 100 Ω beträgt. Der Innenwiderstand der Batterie sei 1 Ω.

(a) Wie groß ist der fließende Strom?

(b) Wie groß ist die Spannung, die am Verbraucher abfällt?

(c) Welche Spannung messen Sie am Verbraucher mit einem Voltmeter, dessen Widerstand 5 kΩ beträgt?

Musterlösung:



(a) Verbraucherwiderstand und Batterie sind in Reihe geschaltet. Der fließende Strom beträgt also:

$$I_{\mathrm{V}} = \frac{U_0}{R_{\mathrm{I}} + R_{\mathrm{V}}} \approx 0.12 \text{ A} \tag{68}$$

(b) Daraus folgt als Verbraucherspannung:

$$U_{\mathrm{V}} = I \cdot R_{\mathrm{V}} = U_0 \frac{R_{\mathrm{V}}}{R_{\mathrm{I}} + R_{\mathrm{V}}} \approx 11.881 \text{ V} \tag{69}$$

(c) Um die Spannung am Verbraucher zu **messen**, schließt man das Voltmeter parallel zum Verbraucher. Ein ideales Voltmeter hat einen unendlich großen Widerstand, sodass durch dieses kein Strom fließt. So ein Voltmeter liefert dann genau die gleiche Spannung, wie gerade berechnet. Das hier betrachtete Voltmeter hat allerdings einen endlichen Widerstand R_{M}, sodass gilt:

$$\frac{1}{R_{\mathrm{VM}}} = \frac{1}{R_{\mathrm{V}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{M}}} \tag{70}$$

$$\Leftrightarrow R_{\mathrm{VM}} = \frac{R_{\mathrm{V}} R_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{V}} + R_{\mathrm{M}}} \tag{71}$$

$$\Rightarrow I_{\mathrm{VM}} = \frac{U_0}{R_{\mathrm{I}} + R_{\mathrm{VM}}} \tag{72}$$

$$\Rightarrow U_{\mathrm{VM}} = I \cdot R_{\mathrm{VM}} = U_0 \frac{R_{\mathrm{VM}}}{R_{\mathrm{I}} + R_{\mathrm{VM}}} \approx 11.879 \text{ V} \tag{73}$$

Aufgabe 5: Welle im Hohlleiter — 3 Punkte

Betrachten Sie eine TE_{10}-Welle in einem rechteckigen Hohlleiter mit den Kantenlängen $a = 10$ cm und $b = 6$ cm.

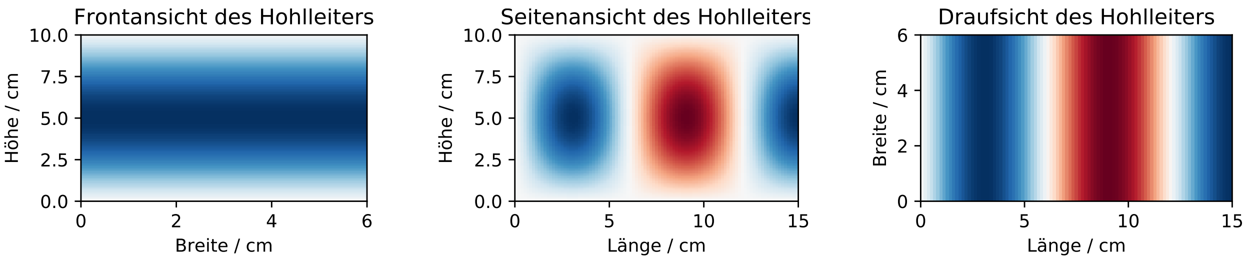
(a) Skizzieren Sie grafisch den Verlauf des E-Feldes in drei orthogonalen Ebenen.

(b) Wie groß ist die Grenzfrequenz, unterhalb der die Welle nicht mehr propagiert?

(c) Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit der Welle bei einer Frequenz von $f = 2$ GHz?

Musterlösung:

(a) E-Felder der TE_{10} Mode.



Eine **T**ransversale **E**lektrische 10 Mode besitzt in der

Breite eine konstante Feldstärke ($n = 0$)
Höhe eine Halbwelle ($m = 1$)
Länge einen longitudinalen Schwingungsanteil

Die Überlagerung dieser Anteile ergibt die oben gezeigten Feldstärken.

(b) Herleitung siehe Skript vom 09. Juli:

$$f_{10;\mathrm{Grenze}} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} \approx 1.5\ \mathrm{GHz} \tag{74}$$

(c) Für die Phasengeschwindigkeit folgt:

$$v_{10} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{c^2\pi^2\left(\frac{1}{a}\right)^2}{4\pi^2 f^2}}} \approx 80 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}. \tag{75}$$