Physik II
5. Übungsblatt

SoSe 2018

Ausgabe: 08.05.2018
Abgabe: 15.05.2018, 12 Uhr

Prof. Dr. Shaukat Khan
Prof. Dr. Götz S. Uhrig

Aufgabe 0: Verständnisfragen — 0 Punkte

1) Warum verwendet man in der Praxis Spulen zur Erzeugung von Magnetfeldern?

2) Wie stellt man die Stromdichte $\vec{j}$ eines fadenförmigen (d.h. unendlich dünnen) Leiters, der entlang der x-Achse verläuft, als mathematische Formel dar?

3) Was besagen die Kirchhoffschen Regeln anschaulich?

4) Betrachten Sie eine quaderförmige Ladungsverteilung. Welche Form nimmt der Quadrupoltensor dieser Verteilung an?

Aufgabe 1: Large Hadron Collider — 5 Punkte

Der Large Hadron Collider (LHC) am CERN ist ein Speicherring für Protonen, der für eine Strahlenergie von 7 TeV bei einem Strahlstrom von 580 mA ausgelegt wurde. Der Umfang des Rings beträgt 26,7 km.

(a) Berechnen Sie den Lorentzfaktor γ der Protonen (vgl. Physik I). Ist es gerechtfertigt, die Protonengeschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ gleichzusetzen?

(b) Welche Ladung und wie viele Protonen sind bei dem angegebenen Strom gespeichert?

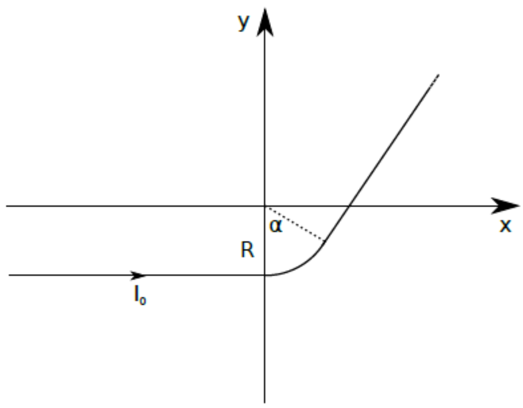
(c) Wie hoch ist die gesamte kinetische Energie in Joule?

(d) Mit welcher Geschwindigkeit (in Knoten) bewegt sich ein Flugzeugträger der Masse 100.000 t bei derselben kinetischen Energie?

Aufgabe 2: Gekrümmter Draht — 5 Punkte

Kennt man die Stromdichten, kann man die durch diese Ströme veursachten Magnetfelder mit dem Biot-Savart-Gesetz berechnen. Dies ist in der Regel weniger aufwendig, als vom Ampèreschen Durchflutungsgesetz auszugehen. Es ist allerdings zu beachten, dass das Biot-Savart-Gesetz eine nichtrelativistische Näherung ist. Es berücksichtigt nicht, dass sich Änderungen von Strömen nicht instantan im gesamten Raumbereich auswirken, sondern sich die Änderungen im Magneteld mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Gegeben sei ein unendlich langer, gekrümmter Draht (siehe Abbildung). Durch ihn fließe ein Strom I_0. Die Krümmung entspricht einem Kreisbogen mit dem Ursprung als Mittelpunkt und α als Mittelpunktswinkel. Der Radius sei R.



(a) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\vec{B}(\vec{0})$ am Ursprung mithilfe des Gesetzes von Biot-Savart.
Hinweis: Geometrische Symmetrieargumente (siehe Skizze) können die Rechnung stark vereinfachen.

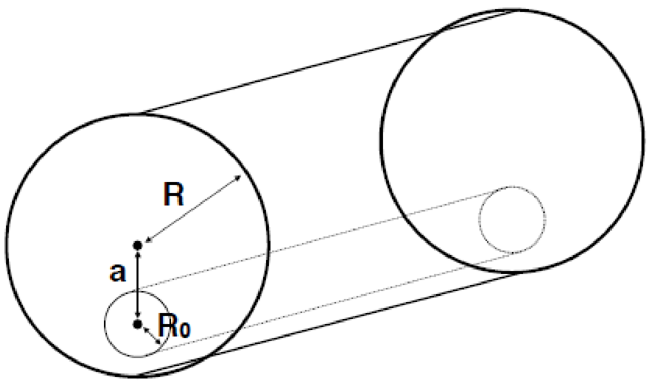
(b) Betrachten Sie in Ihren Gleichungen den Spezialfall $\alpha = 0$. Berechnen Sie diesen Fall zudem mithilfe des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes und vergleichen sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 3: Magnetfeld eines Kreiszylinders mit Bohrung — 5 Punkte

Ein typisches Vorgehen in allen Bereichen der Physik ist das Ausnutzen des Superpositionsprinzips, um eine komplexe Konfiguration in bekannte Konfigurationen zu zerlegen. Im vorliegenden Fall soll die gegebene Stromdichte durch Stromdichten einfacher Geometrie dargestellt werden, deren $\vec{B}$-Felder leicht zu bestimmen sind. Das gesamte $\vec{B}$- Feld ergibt sich dann aus der Superpositon der Einzelfelder. Dabei wird auch ausgenutzt, dass sich Bereiche ohne Ströme als Superposition von betragsmäßig gleichen, aber entgegengesetzten Strömen darstellen lassen.

a) Betrachten Sie zunächst einen in der Länge unendlich ausgedehnten zylinderförmigen Leiter mit Radius R, der von einem Strom konstanter Stromdichte $\vec{j}$ durchflossen wird. Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Stokes das Magnetfeld sowohl innerhalb als auch außerhalb des Leiters.

b) Nehmen Sie nun an, dass sich im Zylinder aus Teil a) eine Bohrung parallel zur Symmetrieachse des Leiters im Abstand a von der Achse befindet. Die Bohrung hat den Radius R_0 und es gilt $a + R_0 < R$ (s. Abbildung). Berechnen Sie das Feld im Inneren der Bohrung. Gehen



Sie dabei folgendermaßen vor:
Betrachten Sie die Konfiguration aus der Aufgabenstellung als Superposition eines stromdurchflossenen Vollzylinders wie in Teil a) einerseits und eines Zylinders an der Stelle der Bohrung andererseits, der von einem Strom konstanter Stromdichte $-\vec{j}$ durchflossen wird. Berechnen Sie dann das Feld im Inneren der Bohrung als Superposition der Felder dieser beiden Zylinder.

c) Betrachten Sie nun ein bewegtes Punktteilchen der Masse m und der Ladung q, das sich innerhalb der Bohrung befindet (in der wir ein Vakuum annehmen). Beschreiben Sie qualitativ, wie mögliche stabile Bahnen aussehen. Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit das Punktteilchen maximal haben darf, damit es die Wände der Bohrung nicht berührt.

Aufgabe 4: Multipolentwicklung **5 Punkte**

Wie sich bei einer Taylorentwicklung komplizierte Funktionen in eine Reihe entwickeln lassen, so können mit Hilfe der Multipolentwicklung komplizierte Ladungsdichten auf wenige Multipolmomente reduziert werden. Häufig reicht es aus, eine Entwicklung bis zum Quadrupolmoment durchzuführen, um eine hinreichend gute Beschreibung der Ladungsdichten zu erhalten.

Gegeben sei die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{(D\,L)^2} \cdot xy \cdot \Theta\left(\frac{D}{2} - |x|\right) \cdot \Theta\left(\frac{L}{2} - |y|\right) \cdot \delta(z), \tag{1}$$

die an jedem Punkt $\vec{r} = (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3$ des dreidimensionalen Raums definiert ist. Bei $\Theta(x)$ handelt es sich um die so genannte Heaviside-Funktion, die wie folgt definiert ist:

$$\Theta(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Geben Sie an, was für ein Körper durch die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ dargestellt werden könnte.

(b) Berechnen Sie das Monopolmoment Q, das Dipolmoment $\vec{p}$ und die Komponenten Q_{ij} des Quadrupoltensors der Ladungsdichte.

(c) Bestimmen Sie nun das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ der Ladungsdichte im Fernfeld.