

Ausgabe: 30.04.2018
Abgabe: 08.05.2018, 12 Uhr

Prof. Dr. Shaukat Khan
Prof. Dr. Götz S. Uhrig

Aufgabe 0: Verständnisfragen

0 Punkte

- 1) Erläutern Sie, warum man das Coulombsche Gesetz für das elektrische Feld \vec{E} , nicht aber für die dielektrische Verschiebungsdichte \vec{D} aufstellen kann.
- 2) Wie würden Sie einem Familienmitglied Ihrer Wahl in einfachen Worten (aber physikalisch korrekt) erklären, was ein elektrisches Feld ist und warum darin Energie steckt?
- 3) Kann man einen physikalischen Zusammenhang zwischen Elektreten bzw. Ferroelektrika und der Nullstelle im Nenner der Clausius-Mosotti-Formel aufstellen?
- 4) Wie können Sie sich anschaulich die Begriffe Divergenz und Rotation im Hinblick auf die Quell- und Wirbelstärke eines Vektorfeldes vorstellen.

Aufgabe 1: Operatoren in krummlinigen Koordinaten

5 Punkte

Möchte man in seinen Berechnungen die Symmetrie eines betrachteten physikalischen Problems berücksichtigen, so kann es sinnvoll sein, krummlinige Koordinaten einzuführen. Entsprechend finden in der Physik häufig Zylinder- oder Kugelkoordinaten Anwendung. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes \vec{E} und den Gradienten eines Skalarfeldes f in Kugelkoordinaten zu berechnen.

- (a) Geben Sie zunächst die kartesischen Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)^\top$ in Abhängigkeit des Kugelkoordinatensatzes $u \in \{r, \varphi, \vartheta\}$ an und berechnen Sie alle $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$. Bestimmen Sie anschließend den Betrag g_u der Ableitungen und geben Sie die Einheitsvektoren \vec{e}_u in Kugelkoordinaten an.
- (b) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Informationen aus der Vorlesung $\text{div}(\vec{E})$, $\text{rot}(\vec{E})$ und $\text{grad}(f)$.
- (c) Berechnen Sie ebenfalls Δf und $\Delta \vec{E}$.

Aufgabe 2: Natriumatome im elektrischen Feld

5 Punkte

Für die atomare Polarisierbarkeit von Natrium findet man in der Literatur die Angabe $\alpha/(4\pi\epsilon_0) = 2,4 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$.

- (a) Wie groß ist das Dipolmoment, das in einem elektrischen Feld von $E = 105 \text{ V/m}$ entsteht?
- (b) Um wie viel verschiebt sich in diesem Fall der Schwerpunkt der Elektronenhülle (bestehend aus elf Elektronen) gegenüber dem Atomkern?
- (c) Welche Ladung trägt eine Kugel, die sich im Abstand von 20 cm gegenüber einer geerdeten Platte befindet, wenn die Feldstärke an einem Punkt P, der genau zwischen Kugelmittelpunkt und Platte liegt, $E = 105 \text{ V/m}$ beträgt?
- (d) Welches Drehmoment und welche Beschleunigung erfährt ein Natriumatom am Punkt P? In welche Richtung wird es beschleunigt?

Aufgabe 3: Vektorrelationen**5 Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass die Relation

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \vec{c}) \cdot (\vec{b} \vec{d}) - (\vec{a} \vec{d}) \cdot (\vec{b} \vec{c}) \quad (1)$$

Gültigkeit hat.

Hinweis: Das Kreuzprodukt kann mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors wie folgt ausgedrückt werden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j \cdot \vec{e}_k \quad (2)$$

(b) In der Vorlesung wurde angenommen, dass Gleichung (1) auch Gültigkeit hat, wenn

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \quad (3)$$

$$\vec{b} = \vec{E} \quad (4)$$

$$\vec{c} = \vec{\nabla} \quad (5)$$

$$\vec{d} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \quad (6)$$

sind. Im Allgemeinen darf dies jedoch nicht unmittelbar angenommen werden, da es sich bei $\vec{\nabla}$ um einen Operator handelt. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \vec{\nabla} \right) \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \cdot \vec{\nabla} \right) \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) \quad (7)$$

aus der Vorlesung trotzdem Gültigkeit hat.

Hinweis: Beachten Sie, dass an einigen Stellen die Produktregel Anwendung finden muss.

Aufgabe 4: Kugel mit Dielektrikum**5 Punkte**

Betrachten Sie eine Metallkugel mit Radius a , die eine Ladung q trägt. Die Kugel sei bis zum Radius $b > a$ von einem Dielektrikum mit Permittivität ϵ umgeben.

(a) Geben Sie die dielektrische Verschiebungsdichte \vec{D} für Radien $r > a$ an.(b) Geben Sie das elektrische Feld \vec{E} für alle Radien an.(c) Berechnen Sie das elektrische Potential $\phi(0)$ im Mittelpunkt der Kugel. Wie üblich gelte $\phi(\infty) = 0$.