Physik II
3. Übungsblatt

SoSe 2018

Ausgabe: 24.04.2018
Abgabe: **30.04.2018, 16 Uhr**

Prof. Dr. Shaukat Khan
Prof. Dr. Götz Uhrig

Aufgabe 0: Verständnisfragen — 0 Punkte

1) Rechtfertigen Sie vor Ihrem alten Mathelehrer, weshalb die Delta-Distribution keine Funktion im eigentlichen Sinne ist, sie aber trotzdem in der Physik notwendig ist.

2) Ein elektrostatischer Beschleuniger soll Elektronen von einer negativ geladenen Kathode zu einer geerdeten Anode beschleunigen, wobei die Elektronen durch ein Loch in der Anode austreten sollen. Funktioniert das oder folgen die Elektronen den Feldlinien und treffen immer auf die Anode?

3) Wie ändert sich die Kapazität eines Plattenkondensators mit Plattenabstand d, wenn zwischen den Platten eine weitere Metallplatte der Dicke $d/2$ eingebracht wird?

4) Wie würden Sie Ihren bereits von Leid geplagten Eltern den Satz von Stokes möglichst einfach erklären?

Aufgabe 1: Satz von Stokes im Fingerhut — 5 Punkte

Neben dem Gaußschen Integralsatz existiert auch der Satz von Stokes, der einem ebenfalls das Leben einfacher machen kann. Ziel der Aufgabe ist es, die Gültigkeit des Satzes an einem Beispiel zu zeigen und die Einsicht zu vermitteln, dass es nur wenige Fälle gibt, in denen beide Seiten der im Satz gegebenen Gleichung gleich leicht zu berechnen sind.

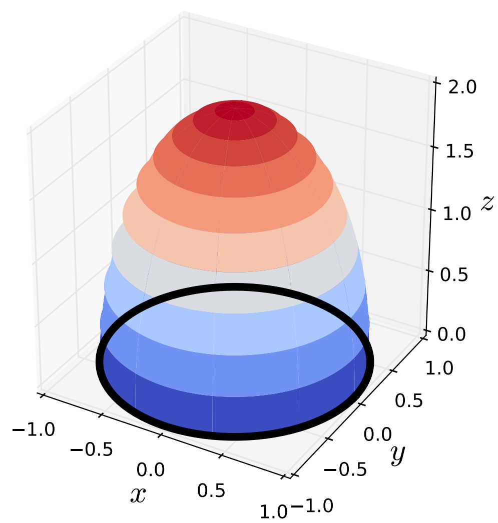
Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (-y, z, 3\,x)^{\mathrm{T}}$ und die Oberfläche eines Fingerhuts (siehe Grafik) mit der Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(\vartheta,\,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\,\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\,\sin(\varphi) \\ 2\,\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Verifizieren Sie den Satz von Stokes

$$\int_{\partial A} \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})\right)\,\mathrm{d}\vec{A}$$

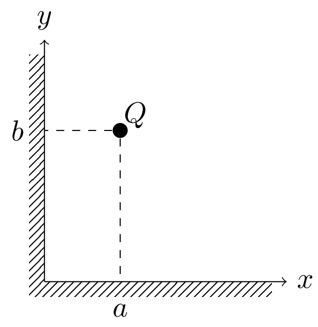
durch die **explizite** Berechnung **beider** Seiten!



Aufgabe 2: Spiegelladungen und Poissongleichung 5 Punkte

Die Methode der Spiegelladungen ist ein nützliches Konzept zum Erfüllen von komplizierteren Randbedingungen. Ziel dieser Aufgabe ist das Üben der Methode sowie das Beweisen der Eindeutigkeit der gefundenen Lösung.

Eine Ladung Q sei am Ort $\vec{r} = (a, b, 0)^{\mathrm{T}}$ fixiert und befinde sich vor einer leitenden geerdeten Winkelplatte mit dem Winkel 90° (siehe Skizze).



(a) Geben Sie das elektrostatische Potential ϕ im Bereich $x, y > 0$ an. Verwenden Sie dazu die Methode der Spiegelladungen aus der Vorlesung. Zeigen Sie **explizit**, dass die von Ihnen gewählte Anordnung der Scheinladungen auch tatsächlich die Randbedingungen für ϕ auf der Winkelplatte erfüllt.

(b) Das obige Problem lässt sich allgemein als Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen formulieren:

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{für} \quad \vec{r} \in V, \quad \phi(\vec{r})\big|_{\vec{r}\in\partial V} = 0.$$

∂V bezeichnet dabei den Rand des betrachteten Gebietes. Das Potential des Randes ist dabei, wie zum Beispiel im obigen Fall der leitenden geerdeten Platte, als konstant vorgegeben.
Wir wollen nun **allgemein** zeigen, dass zwei Lösungen des angegebenen Problems, ϕ_1 und ϕ_2, sich maximal in einer unphysikalischen Konstanten unterscheiden können, sodass sie als äquivalent anzusehen sind und damit die Lösung als **eindeutig** identifiziert werden kann.

Anleitung:

- Definieren Sie $\phi_0 = \phi_1 - \phi_2$ und überlegen Sie sich, wie Δ auf ϕ_0 wirkt.
- Zeigen Sie, dass $\int_V (\vec{\nabla}\phi_0)^2 \, \mathrm{d}V = 0$, indem Sie folgende Produktregel nutzen:

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\phi_0\right)^2 \mathrm{d}V = \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\left(\phi_0\vec{\nabla}\phi_0\right) - \phi_0\Delta\phi_0\right) \mathrm{d}V.$$

- Mit welcher Forderung/Annahme an das obige Problem dürfen Sie sich den Gaußschen Integralsatz zu Nutze machen?
- Zeigen Sie abschließend, dass $\phi_0 = \text{const}$ im gesamten Gebiet V gilt, was die Eindeutigkeit der Lösung impliziert.

Aufgabe 3: Gewitterwolke 5 Punkte

Eine Gewitterwolke mit $17\,\mathrm{km}^2$ Gesamtfläche schwebt in $900\,\mathrm{m}$ Höhe über der Erdoberfläche. Die Wolke bildet zusammen mit der Erdoberfläche einen Plattenkondensator.

(a) Berechnen Sie die Kapazität dieses Plattenkondensators (die begrenzende Fläche auf der Erde sei gleich der Wolkenfläche).

(b) Wie groß kann die Ladung der Gewitterwolke werden, bis sich der Kondensator über einen Blitz entlädt? Die Durchschlagsfeldstärke von Luft beträgt $3 \cdot 10^6\,\mathrm{V/m}$.

(c) Der Kondensator wird, wenn er die kritische Spannung erreicht, durch einen Blitz vollständig entladen. Welcher mittlere Strom in Ampere ($1\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{C/s}$) fließt zur Erde, wenn der Blitz $1\,\mathrm{ms}$ dauert?

Aufgabe 4: Dielektrische Flüssigkeit im Zylinderkondensator 5 Punkte

Ein Zylinderkondensator bestehe aus zwei konzentrischen Röhren der Länge $L = 1\,\mathrm{m}$, wobei der Abstand $d = 1\,\mathrm{mm}$ zwischen den Röhren als klein gegen ihre Radien angenommen werden soll. Nachdem der Kondensator mit einer Gleichspannungsquelle ($U = 200\ \mathrm{V}$) aufgeladen wurde, wird das untere Ende des Kondensators in destilliertes Wasser knapp eingetaucht (Dichte $\rho = 1\,\mathrm{g/cm^3}$, Dielektrizitätszahl $\varepsilon = 81$; Leitfähigkeit, kapillare Kräfte und Eintauchtiefe sind zu vernachlässigen). Das Wasser steigt im Kondensator, wobei die zusätzliche Energie (potenzielle Energie des Wassers und Feldenergie) von der Spannungsquelle geliefert wird.

Berechnen Sie die Höhe h der Wassersäule, die sich nach dem Einschwingen einstellt, indem Sie die wirkenden Kräfte betrachten.