Physik II — SoSe 2018
2. Übungsblatt

Ausgabe: 17.04.2018
Abgabe: 24.04.2018, 12 Uhr

Prof. Dr. Shaukat Khan
Prof. Dr. Götz Uhrig

Aufgabe 0: Verständnisfragen — 0 Punkte

1) Unter welchen Vorgaben ist es weniger sinnvoll, ein elektrisches Feld mit Hilfe des Coulombschen Gesetzes zu berechnen? Was kann man stattdessen tun?

2) Wovon hängt der Fluss durch eine gedachte geschlossene Oberfläche ab, die einen elektrischen Dipol umgibt (d.h. zwei entgegengesetzt gleiche Ladungen in einem bestimmten Abstand).

3) Bildet die Coulombkraft ein konservatives Kraftfeld? Nennen Sie zwei Argumente.

4) Was folgt daraus, dass die Divergenz des E-Feldes nicht verschwindet?

Aufgabe 1: Die Delta-Distribution — 5 Punkte

Die Delta-Distribution spielt in der Physik eine wichtige Rolle und wird zum Beispiel verwendet, um die Ladungsverteilung von Punktladungen zu beschreiben. Sie ist jedoch keine Funktion, sondern eine Distribution. Das bedeutet, dass sie nicht als Funktion hingeschrieben werden kann und nur Sinn ergibt, wenn sie auf etwas angewendet wird. Da die Anwendung auf eine sogenannte Testfunktion allerdings über das Integral geschrieben wird: $\delta(f) = \int_\Omega \delta(x) f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$ (mit Ω als Definitionsbereich der Testfunktion) und (fast) alle physikalisch relevanten Funktionen sich wie eine Testfunktion verhalten, wird in der Physik häufig der Unterschied zwischen Distribution und Funktion vernachlässigt. Im Folgendem wollen wir uns angucken, wie die Delta-Distribution als Grenzwert zweier Funktionsfolgen hervorgeht.

Untersuchen Sie zunächst die Normalverteilung $f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\bigl(-x^2/2\sigma^2\bigr)$.

(a) Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Funktionenfolge folgende Eigenschaften besitzt:

$$\lim_{\sigma\to 0} f_\sigma(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \lim_{\sigma\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{1}$$

Nun sollen Sie die Lorentzverteilung

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \tag{2}$$

untersuchen.

(b) Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Funktionenfolge folgende Eigenschaften besitzt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{3}$$

Hinweis: Die Substitutionen $u = x/\varepsilon$ und $y = \arctan(u)$ könnten hilfreich sein.

(c) Berechnen Sie

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \lim_{\sigma\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\sigma(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

und deuten Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2: Elektrische Ladung der Erde — 5 Punkte

Nahe der Erdoberfläche kann ein elektrisches Feld nachgewiesen werden. Es ist vertikal nach unten gerichtet und beträgt im Mittel 150 N/C (mit starken zeitlichen und örtlichen Schwankungen).

(a) Berechnen Sie mithilfe des Gaußschen Gesetzes die durchschnittliche Flächenladungsdichte an der Erdoberfläche, wenn man die Erde als leitende Kugel auffasst.

(b) Wie groß wäre demnach die Gesamtladung der Erde (mittlerer Erdradius $r_E = 6371$ km)?

(c) Zwei Kugeln der Masse 100 g werden aus einer Höhe von 2 m fallengelassen. Eine ist elektrisch neutral, die andere trägt eine Ladung von $+100$ μC. Welche Kugel fällt schneller und um wie viel unterscheidet sich die Fallzeit? Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

Aufgabe 3: Punktladung in einer Metallkugel — 5 Punkte

Das Innere eines Metalls ist frei von elektrischen Feldern. Wäre dies momentan nicht so, dann würden Kräfte auf die im Metall beweglichen Ladungen (Elektronen) ausgeübt werden und sie würden sich so lange verschieben, bis das elektrische Feld wieder null ist.
Angenommen, im Inneren einer metallischen Hohlkugel mit Radius R befindet sich eine Ladung Q, und zwar im Abstand $R/2$ vom Kugelmittelpunkt. Die Hohlkugel selbst ist elektrisch neutral. Beantworten Sie die folgenden Fragen ohne Rechnung aber mit Begründung.

(a) Wie verteilen sich die Ladungen in der Wand der Hohlkugel unter dem Einfluss der Ladung in ihren Innenraum? Sind die Ladungen homogen verteilt?

(b) Skizzieren Sie grafisch die elektrischen Feldlinien im Innern der Hohlkugel.

(c) Existiert ein elektrisches Feld außerhalb der Hohlkugel? Wenn ja, wie sind die Feldlinien verteilt?

Aufgabe 4: Fluss durch eine Fläche — 5 Punkte

Die Berechnung von Flüssen ist in der Physik auch außerhalb der Elektrostatik wichtig. Das Gaußsche Gesetz beschreibt in der Elektrostatik und Elektrodynamik den elektrischen Fluss durch eine geschlossene Fläche und verknüpft diesen mit der Ladung. Dies ermöglicht oftmals eine bequeme Berechnung beider Größen.
Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F} = (0, 0, z)$ und das unten gezeigte Volumen V. Es wird von zwei Flächen A_1 und A_2 begrenzt. A_1 ist im Bild sichtbar und lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\mathrm{A}_1 : \ x^2 + y^2 + z = 1 \, , \text{ mit } z \in [0, 1] \tag{5}$$

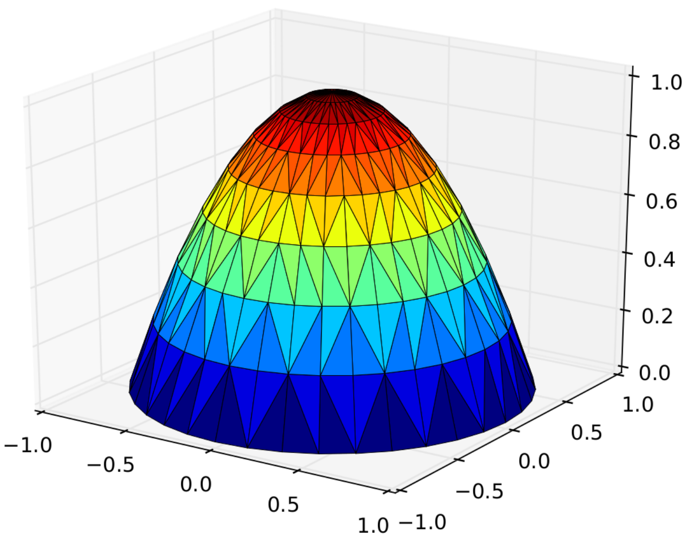
Bei A_2 handelt es sich um die in der xy-Ebene liegende Grundfläche.

(a) Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Fläche A_1.
Hinweis: Nutzen Sie eine geeignete Parametrisierung mit den Parametern $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(b) Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Fläche A_2. Ist eine vollständige Berechnung wie in (a) notwendig?

(c) Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{F}$ der das Volumen durch die Oberfläche ∂V verlässt.

(d) Nutzen Sie nun den Gaußschen Integralsatz, um mit Hilfe des Ergebnisses aus (c) das Volumen V zu bestimmen.



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0