Physik II — SoSe 2018
0. Übungsblatt

Ausgabe: 10.04.2018
Abgabe: Bearbeitung in der Übung

Prof. Dr. Shaukat Khan
Prof. Dr. Götz Uhrig

Aufgabe 0: Verständnisfragen — 0 Punkte

1) Welche Grundkräfte der Physik kennen Sie bisher aus ihrem Studium? Von welchen weiteren haben Sie vielleicht schon gehört?
2) Welche Einheitensysteme kennen Sie? Welche Vorteile der verschiedenen Systeme können Sie sich vorstellen? Welches ist ihrer Meinung nach am sinnvollsten?
3) Ihre Eltern interessieren sich dafür, was Sie in Ihrem Physikstudium alles lernen. Sie haben sich entschieden, ihnen etwas über die Größen Gradient, Divergenz und Rotation zu erzählen. Wie können Sie diese ihren Eltern anschaulich erklären?
4) Was können Sie über ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}$ aussagen?

Aufgabe 1: Divergenz, Rotation und Gradient — 0 Punkte

Viele physikalische Systeme lassen sich durch Verwendung von Vektoren für beliebige Dimensionen beschreiben, wobei der Begriff der Divergenz und des Gradienten zentrale Größen darstellen. In drei Dimensionen kann ferner die Rotation definiert werden.
Im Rahmen der Elektrostatik und -dynamik werden Felder verwendet, für welche Sie diese Größen benötigen werden. In dieser Aufgabe werden die grundlegenden Eigenschaften des Nabla-Operators aus dem ersten Semester aufgefrischt.

Der Nabla-Operator ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^\top .$$

Die Divergenz, Rotation und Gradient können damit geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \text{div}\ \vec{a}(x,y,z) &= \vec{\nabla}\cdot\vec{a}(x,y,z)\,, \\ \text{rot}\ \vec{a}(x,y,z) &= \vec{\nabla}\times\vec{a}(x,y,z)\,, \\ \text{grad}\ U(x,y,z) &= \vec{\nabla}U(x,y,z)\,, \end{aligned}$$

wobei $\vec{a}(x,y,z)$ ein Vektorfeld und $U(x,y,z)$ ein Skalarfeld ist.
Gegeben sei der allgemeine Ortsvektor $\vec{r}$ mit $r := |\vec{r}|$ und $r > 0$. Berechnen Sie:

(a) $\vec{\nabla}(x^2 + xz - z^2 + 3xyz)$

(b) $\vec{\nabla}\cdot(20xz - 2x^2 + 8x, 2e^z - 1 + y(\sin^2(xyz) + (e^{ixyz} + i^3\sin(xyz))^2), \ln\big(y^7\big) + 46xz + 33z + 11z^2)^\top$
Hinweis: Dieser Aufgabenteil ist nicht komplex.

(c) $\vec{\nabla}\times(2y-4, 4z, x^2+y^2+z^2)^\top$

(d) $\vec{\nabla}r$

(e) $\vec{\nabla}\times\vec{r}$

(f) $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$

(g) $\vec{\nabla}\frac{1}{r}$

(h) $\vec{\nabla}\cdot(\frac{1}{r^2}\vec{e_r})$

Aufgabe 2: Potentiale — 0 Punkte

Aus Potentialen lässt sich das zugehörige Kraftfeld durch Bestimmung des Gradienten berechnen. Häufig ist auch der umgekehrte Schritt notwendig, das Potential zu einem konservativen Kraftfeld zu bestimmen.
Dies und die Berechnung der Rotation sollen in der folgenden Aufgabe geübt werden.

Berechnen Sie für die folgenden Vektorfelder die Rotation und bestimmen Sie ggf. das Potential dazu.

(a) $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} x + yz \\ y + xz \\ xy \end{pmatrix}$

(b) $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} e^{-x}\sin(z) + y^2 z\sin(zx) \\ -2y\cos(xz) \\ -e^{-x}\cos(z) + xy^2\sin(zx) \end{pmatrix}$

(c) $\vec{F}_3 = \frac{a+r}{a}\exp(-r/a)\frac{\vec{r}}{r}$

Hinweis: Der Nabla-Operator in Kugelkoordinaten ist gegeben durch:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,.$$

Aufgabe 3: Elektrische Potentiale — 0 Punkte

Verschiedene Ladungsverteilungen können unterschiedliche Potentiale erzeugen. Ein sehr einfacher Fall ist ein Potential, welches durch eine Potenz beschrieben wird. Im Rahmen einer Näherung (Taylor-Entwicklung in niedrigster Ordnung) kann in einigen Fällen mit einer solchen Form gearbeitet werden.
In dieser Aufgabe machen Sie sich grundlegende Gedanken zu einigen simplen Potentialformen.

Ein Elektron befinde sich in einem elektrischen Potential in einer Dimension

$$U(x) = cx^k.$$

(a) Bestimmen Sie die Einheit von k und c.

(b) Skizzieren Sie das Potential $U(x)$ für verschiedene Werte von k und c. Versuchen Sie dabei möglichst viele unterschiedliche Potentialtypen zu finden.

(c) Wählen Sie aus den in (b) gezeichneten Potentialen mindestens zwei, in denen das geladene Elektron schwingen kann. Wo ist dort die Ruhelage?

(d) Um welche Funktion kann man $U(x)$ ergänzen, ohne dass sich physikalisch etwas ändert? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.