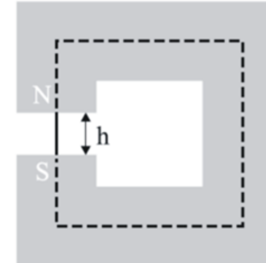
## *B*- und *H*-Feld an Grenzflächen

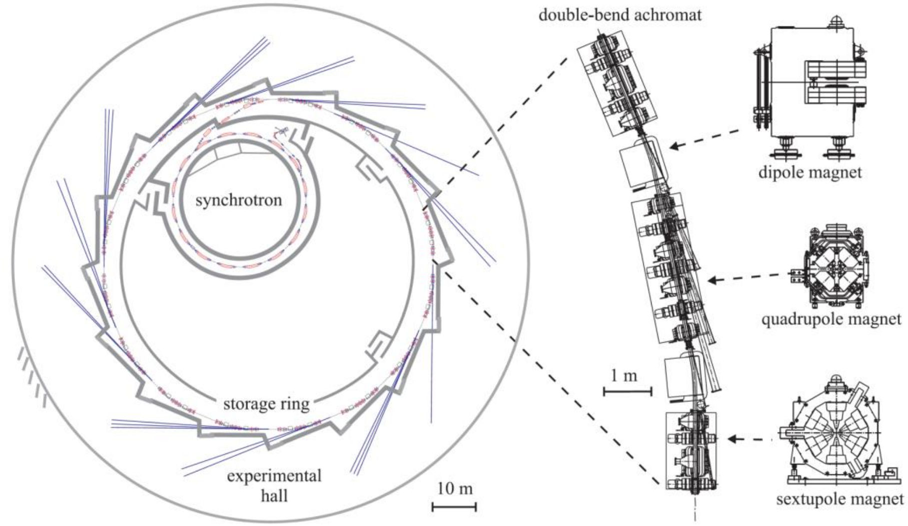



Normalkomponente (ergibt sich aus div $B = 0$, keine magnetischen Monopole)

$$B_1^{\perp} = B_2^{\perp} \quad \leftrightarrow \quad \mu_1 \cdot H_1^{\perp} = \mu_2 \cdot H_2^{\perp}$$

Tangentialkomponente (ergibt sich aus rot $H = 0$, keine äußeren Ströme)

$$\mu_2 \cdot B_1^{\parallel} = \mu_1 \cdot B_2^{\parallel} \quad \leftrightarrow \quad H_1^{\parallel} = H_2^{\parallel}$$




**Beispiel:** C-förmiger Elektromagnet z.B. zur Strahlführung in einem Speicherring (mit Strom *I*, Windungszahl *n*, Abstand zwischen den Polen *h*)

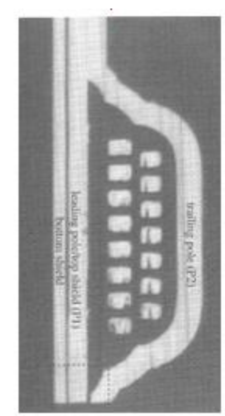
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{\mathrm{Fe}} \cdot (L - H) + H_{\mathrm{Luft}} \cdot h = n \cdot I$$

$$\mu_{\mathrm{Fe}} >> \mu_{\mathrm{Luft}} \qquad \mu_{\mathrm{Luft}} \approx 1$$

$$H_{\mathrm{Luft}} \approx \frac{n \cdot I}{h} \quad \rightarrow \quad B \approx \mu_0 \frac{n \cdot I}{h}$$

z.B. BESSY II Dipolmagnet: I = 614 A, n = 84, h = 50 mm $\rightarrow$ B $\approx$ 1,3 T

z.B. Festplattenlesekopf: I = 20 mA, n = 15, h = 300 nm $\rightarrow$ B $\approx$ 1,3 T



## Energiedichte im magnetischen Feld

$$w_m = \frac{1}{2} B \cdot H$$

(Motivation später – s. Schwingkreis)

Zum Vergleich: Energiedichte im elektrischen Feld $w_e = \frac{1}{2} E \cdot D$

# Magnetismus als relativistischer Effekt

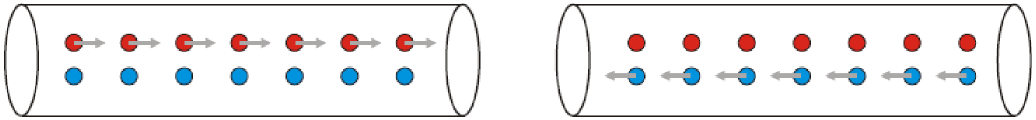
Die Lorentzkraft hängt von der Geschwindigkeit der Ladung ab, sollte also auch davon abhängen, welches Ruhesystem gewählt wird. In der Tat kann der Magnetismus selbst als relativistisches Phänomen aufgefasst werden, und zwar auch bei Geschwindigkeiten, die weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen. Zum Beispiel driften Elektronen in einem Leiter mit Geschwindigkeiten unter 1 mm/s und trotzdem tritt ein relativistischer Effekt deutlich in Erscheinung.
Man betrachte nun einen neutralen stromdurchflossenen Draht. Negative Ladungen bewegen sich mit Geschwindigkeit $v$ nach rechts, positive Ladungen ruhen. Die (Linien-)Ladungsdichten sind $\pm\lambda_0$. Die Kraft auf ein einzelnes Elektron, das im Ruhesystem des Drahts mit Geschwindigkeit $v$ im Abstand $R$ parallel zu den Elektronen fliegt, ist die Lorenzkraft im B-Feld des Drahts

$$\left|\vec{F}\right| = e\cdot v\,\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi\cdot R} = e\,\frac{\mu_0\cdot\lambda_0\cdot v^2}{2\pi\cdot R} = e\,\frac{\lambda_0\cdot v^2}{2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot c^2\cdot R} \qquad \text{mit} \qquad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0\cdot c^2} \quad \text{(s. später)}$$

In einem Ruhesystem, das sich mit Geschwindigkeit $v$ gegen den Draht bewegt, ruhen die Elektronen und die positiven Restladungen bewegen sich nach links. Das äußere Elektron erfährt keine (magnetische) Lorentzkraft, weil es in diesem System ruht. Die Größe der Ladung ist invariant, aber aufgrund der Lorentzkontraktion ist die positive Ladungsdichte um $\gamma$ erhöht und die Ladungsdichte der Elektronen um $1/\gamma$ erniedrigt. Der Draht ist nicht mehr elektrisch neutral.

$$\lambda_+ = \lambda_0 \qquad \lambda_- = -\lambda_0$$

$$\lambda'_+ = \gamma\cdot\lambda_0 \qquad \lambda'_- = \frac{\lambda_-}{\gamma} = -\frac{\lambda_0}{\gamma}$$



Ruhesystem des Drahts    Ruhesystem der Elektronen

$$\lambda'_{\text{gesamt}} = \lambda'_+ + \lambda'_- = \lambda_0\cdot\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) = \lambda_0\cdot\frac{\gamma^2-1}{\gamma} = \lambda_0\cdot\frac{\frac{1}{1-\beta^2}-1}{\gamma} = \lambda_0\cdot\frac{1-1+\beta^2}{\gamma\cdot\left(1-\beta^2\right)} = \lambda_0\cdot\gamma\,\frac{v^2}{c^2}$$

Die Kraft auf das einzelne Elektron, das in diesem System ruht, ist die Coulombkraft des Drahtes mit der Ladungsdichte $\lambda'_{\text{gesamt}}$, also mit dem bekannten $E$-Feld einer Linienladung

$$\left|\vec{F}'\right| = e \cdot \frac{\lambda'_{\text{gesamt}}}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} = e \cdot \frac{\lambda_0 \cdot \gamma \cdot v^2}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^2 \cdot R} = \gamma \left|\vec{F}\right| \approx \left|\vec{F}\right|$$

Für $\gamma \approx 1$ ist die Coulombkraft gleich der Lorentzkraft im Ruhesystem des Drahts. Genauer betrachtet:

$$F = \dot{p} = \Delta p / \Delta t$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta p'} = \frac{F \cdot \Delta t}{F' \cdot \Delta t'} = \frac{F \cdot \gamma \cdot \Delta t'}{\gamma \cdot F \cdot \Delta t'} = 1$$

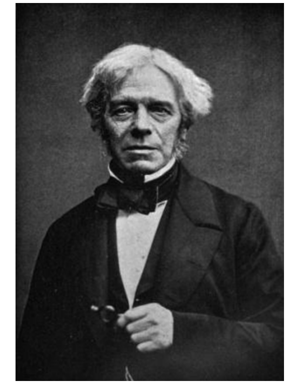
Dies ist relativistisch korrekt, da $\Delta p$ und $\Delta p'$ Impulse transversal zur Geschwindigkeit $v$ und damit in beiden System gleich sind.

Insgesamt erweist sich in diesem Beispiel die magnetische Lorenzkraft als relativistische Modifikation des elektrischen Felds der Ladungen im Draht, obwohl die Geschwindigkeit $\beta \approx 10^{-12}$ winzig ist. Der Effekt ist trotzdem deutlich spürbar, weil die Ladungsdichte sehr hoch ist.

Beispiel: 1 m Kupferdraht mit Fläche 1 mm$^2$ (1 cm$^3$) entspricht mit 8,9 g etwa 0,14 mol. Mit der Annahme von einem freien Elektron pro Atom wären das $8{,}4 \cdot 10^{22}$ Elektronen oder $1{,}3 \cdot 10^4$ C pro Meter.

# 4 Zeitlich veränderliche Felder

## 4.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz



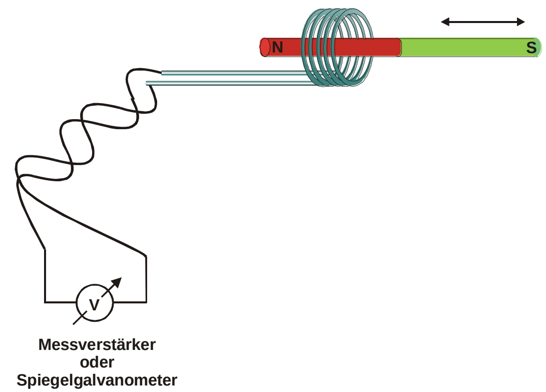
Michael Faraday
1791-1867

Michael Faraday 1831 (aber auch Joseph Henry und Hans Christian Ørstedt):
Elektrischer Strom durch Magnetismus, Grundlage der Stromwirtschaft

Eine Spannung wird in einer Spule "induziert", wenn sich der magnetische Fluss (Skalarprodukt aus *B*-Feld und Flächenvektor) durch die Spule ändert:

- Änderung des Magnetfelds durch Nähern/Entfernen eines Permanentmagneten oder durch Änderung des Stroms in einer zweiten benachbarten Spule
- Änderung der Spulenfläche durch Zusammendrücken/Auseinanderziehen/Drehen oder Änderung der Windungszahl.

Je schneller die Änderung, desto höher die induzierte Spannung




$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\Phi_m$$ Faradaysches Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int \operatorname{rot}\vec{E}\cdot d\vec{A}$$ (Satz von Stokes)

$$\rightarrow \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\Phi_m$$

$$\rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Dieses *E*-Feld ist nicht konservativ. Ein elektrostatisches Potenzial gibt es nur für ein *E*-Feld, das durch statische Ladungen erzeugt wird.
**Anmerkung:** Die Induktionsspannung wird manchmal auch als "elektromotorische Kraft" (*electromotive force, emf*) bezeichnet.

**Beispiel: rotierende Spule im Magnetfeld**

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\cdot B\cdot N\cdot A_1\cdot\cos(\omega t) = B\cdot N\cdot A_1\cdot\omega\cdot\sin(\omega t)$$

*N*: Windungszahl
$A_1$: Fläche einer Windung