

3 Magnetostatik

Kurze Wiederholung

Antike: magnetische Anziehung/Abstoßung von magnetischen Erzen beobachtet

Anwendung ab Mittelalter: Kompass, Navigation durch Orientierung am Erdmagnetfeld

Neuzeit: H. C. Oersted entdeckt 1820 in Kopenhagen während einer Vorlesung die magnetische Wirkung des elektrischen Stroms. J. C. Maxwell veröffentlicht 1865 eine Theorie des Elektromagnetismus.

Anwendungen in der Neuzeit: Kühlschrankschranktür, Magnetkran, Teilchenbeschleuniger, magn. Datenspeicher

Magnete: Permanentmagnete, Elektromagnete (stromdurchflossene Spulen, normal- und supraleitend)

Einheit des Magnetfelds B (auch magnetische Flussdichte oder magnetische Induktion genannt):

$$[B] = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T (Tesla)} = 10^4 \text{ Gs (Gauss)}$$

Erdmagnetfeld $< 10^{-4} \text{ T}$

Elektromagnet mit Eisenkern max. 2 T

Permanentmagnet max. 2 T

Supraleitende Magnete um 10 T

Biot-Savart-Gesetz
$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(\vec{r}_2) \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} d^3 r_2$$

Amperesches (Durchflutungs-)Gesetz $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

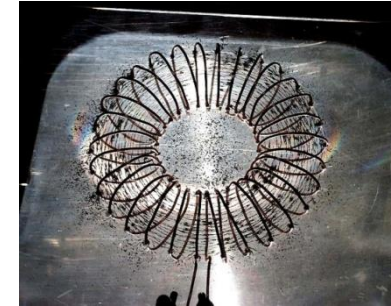
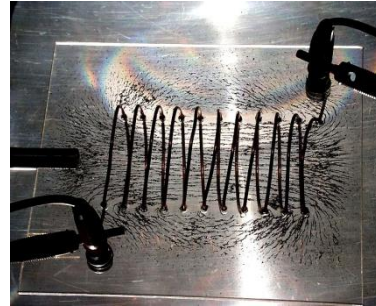
$$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (\text{keine magnetischen Monopole})$$

Lorentzkraft
$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Experiment: Spulen auf Overhead-Projektor

Die Feldlinien werden mit Eisenfeilspänen sichtbar gemacht. Beispiele:

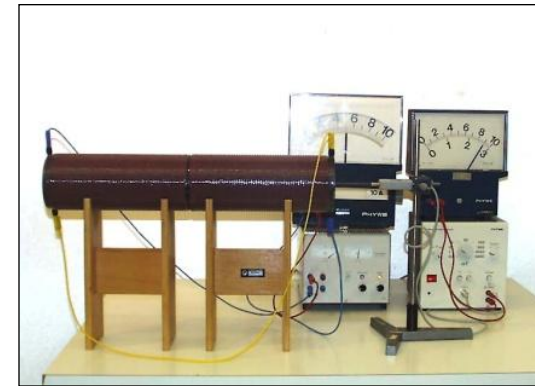
- Leiterschleife
- gerade Spule
- toroidale Spule



Experiment: Magnetfeld einer Spule

gemessen mit einer sog. Hall-Sonde (siehe später). Ergebnis:
Magnetfeld im Inneren einer Spule der Länge L mit N Windungen
und Strom I

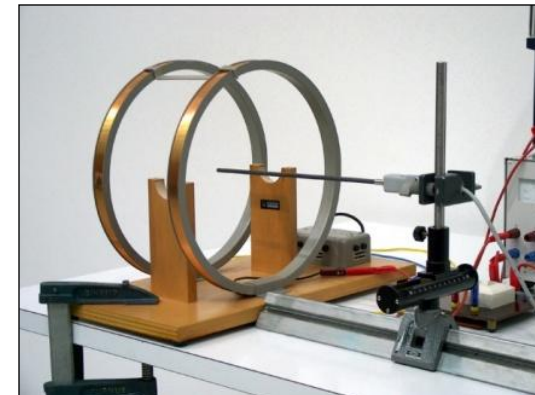
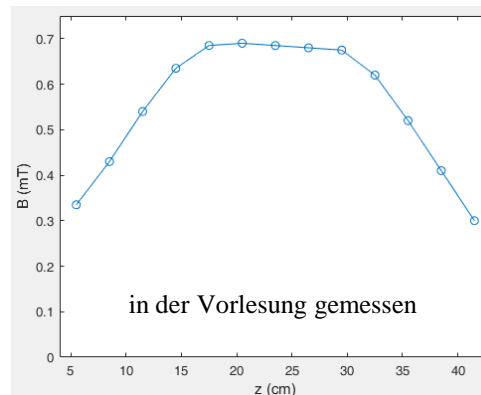
$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I$$



Experiment: Helmholtz-Spulenpaar

B -Feld-Messung mit Hall-Sonde.

Abstand der Spulen = Spulenzradius
ergibt die beste Homogenität
im Zentrum des Spulenpaars



Beispiel: Magnetisches Feld eines unendlich langen stromdurchflossenen Drahts

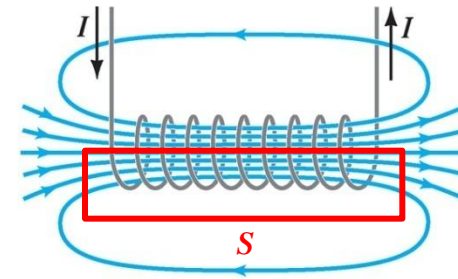
Bei der Berechnung des elektrischen Felds eines homogen geladenen Stabs gab es

- eine komplizierte Variante: Coulombsches Gesetz und Integration über den Stab.
- eine einfache Variante: Gaußsches Gesetz unter Verwendung der Symmetrie des Problems.

Ebenso ist es bei der Berechnung des Magnetfeld eines unendlich langen stromdurchflossenen Drahts:

- eine komplizierte Variante: Biot-Savart-Gesetz und Integration über den Draht
- eine einfache Variante: Amperesches Gesetz, betrachte einen Kreis um den Draht mit Radius r

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot I \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$



Beispiel: Magnetisches Feld einer langen Spule

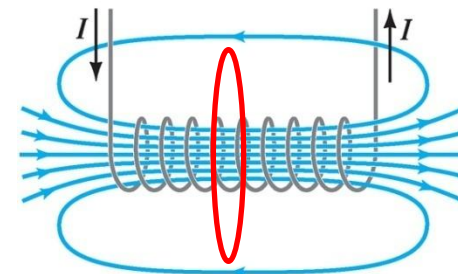
Die Spule besteht aus N Windungen und hat die Länge L . Beim Linienintegral kann das Feld außerhalb der Spule vernachlässigt werden. In z -Richtung entlang der Spule:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \approx B_z \cdot L = \mu_0 \cdot N \cdot I \quad \rightarrow \quad B_z = \mu_0 \cdot n \cdot I \quad \text{mit} \quad n = \frac{N}{L} \quad (\text{Dichte der Windungen})$$

Das radiale Feld einer idealen beliebig langen Spule ist 0 (Translationsinvarianz) $B_r = 0$

Azimutale Komponente: wie beim geraden, unendlich langen Draht

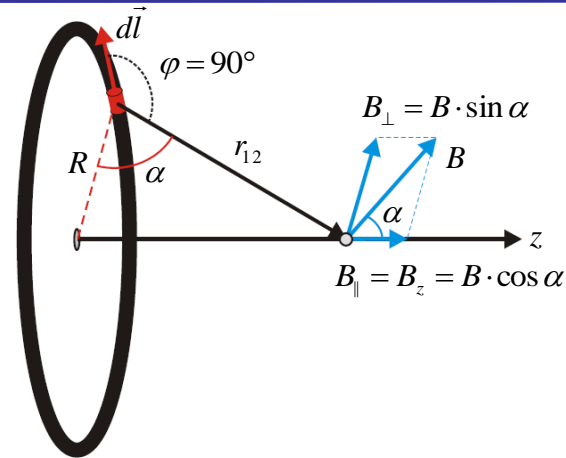
$$\oint_S B_\varphi \cdot d\vec{s} = 2\pi r \cdot B_\varphi = \begin{cases} \mu_0 \cdot I & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases} \quad \rightarrow \quad B_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$



Beispiel: Leiterschleife mit Radius R

Etwas komplizierter, weil das Feld nicht entlang eines einfachen Weges konstant ist (was die Anwendung des Ampereschen Gesetzes ermöglichen würde). Auf der Symmetrieachse:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{z^3} \quad (z \gg R)$$

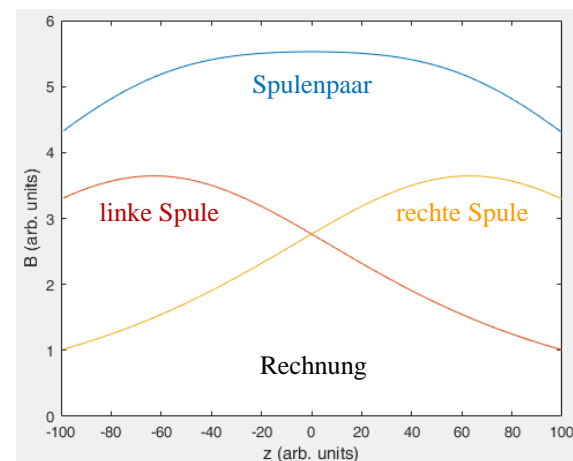


Beispiel: Helmholtz-Spulenpaar – 2 kurze Spulen mit Radius R im Abstand d

$$B(z) = B_1(z) + B_2(z) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2} \left(\left[\left(z + \frac{d}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-3/2} + \left[\left(z - \frac{d}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{-3/2} \right)$$

Beste Homogenität bei $d = R$ (ohne Beweis):

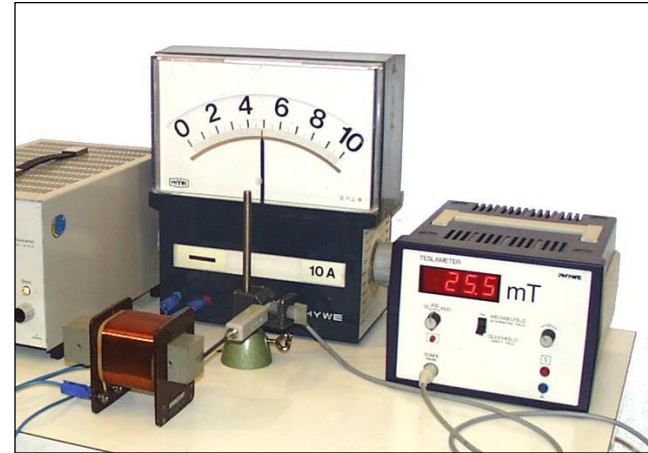
$$\begin{aligned} B(0) &= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2} \left(\left[\frac{R^2}{4} + R^2 \right]^{-3/2} + \left[\frac{R^2}{4} + R^2 \right]^{-3/2} \right) \\ &= \mu_0 \cdot I \cdot R^2 \left(\frac{5}{4} R^2 \right)^{-3/2} = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{8}{\sqrt{125}} \cdot \frac{1}{R} \end{aligned}$$



Experiment: Spule ohne und mit Eisenkern

Beobachtungen:

- das mit einer Hall-Sonde gemessene B -Feld ist mit Eisenkern deutlich größer
- der Eisenkern wird in die Spule hineingezogen



3.4 Magnetische Kräfte auf Leiter und geladene Teilchen

Lorentzkraft (magnetischer Anteil): $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

Hier: Stromvektor = Dichte einer Linienladung (in C/m) mal Geschwindigkeit)

$$\vec{I} = \lambda \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot dq = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \lambda \cdot dl = I \cdot \int (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad \text{weil} \quad \vec{I} \parallel d\vec{l}$$

z.B. Leiter der Länge L senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld B : $F = I \cdot L \cdot B$