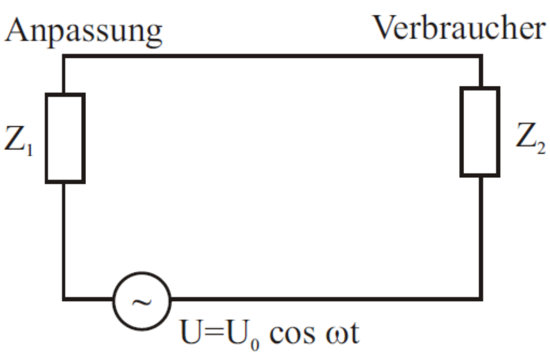
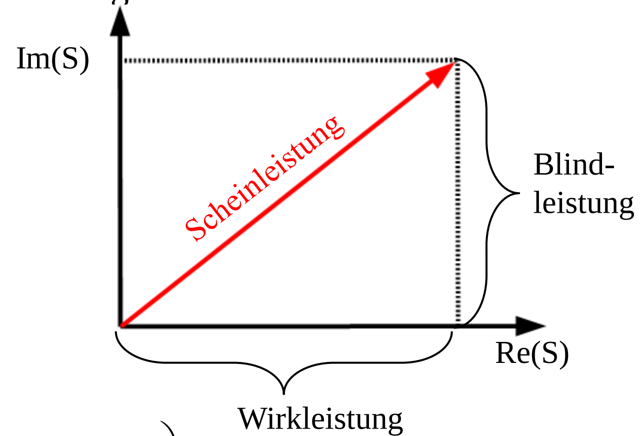
## 5.2.4 Impedanzanpassung

Das Ziel der Impedanzanpassung ist die **Maximierung der Wirkleistung** an einem Verbraucher. Dabei muss berücksichtigt werden, dass sowohl der Innenwiderstand der Wechselspannungsquelle als auch der Lastwiderstand komplexe Beiträge besitzen.




Für die Impedanzen $Z_1$ und $Z_2$ gilt jeweils: $Z_{1,2} = R_{1,2} + \mathrm{i}\left(\omega L_{1,2} - \frac{1}{\omega C_{1,2}}\right)$

Die **Wirkleistung** am Verbraucher $Z_2$ ist proportional zu seinem **Realanteil $R_2$**: $\overline{P}_W = I_{eff}^2 R_2 = \frac{U_{eff}^2}{|Z|^2} R_2$

Nur die Wirkleistung kann am Verbraucher für die Umwandlung in mechanische, thermische und chemische Leistung verwendet werden.

Der effektive Stromfluss durch den gesamten Kreis ist durch das Verhältnis zwischen effektiver Spannung $U_{eff}$ und der Gesamtimpedanz $Z_{ges}=Z_1+Z_2$ gegeben: $I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z_{ges}}$

Für die Leistung folgt: $\overline{P}_W = \frac{U_{eff}^2}{|Z|^2} R_2 = \frac{U_{eff}^2 \cdot R_2}{(R_1+R_2)^2 + \underbrace{\left[\omega(L_1+L_2) - \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\right]^2}}$

oder

$$\omega(L_1+L_2) - \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) = 0$$

**Die Wirkleistung ist maximal, wenn dieser Term verschwindet.**

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = -\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$$

**1. Bedingung: Die Blindwiderstände von $Z_1$ und $Z_2$ müssen entgegengesetzt gleich groß sein!**

Wenn die Blindwiderstände abgeglichen sind, gilt für die Wirkleistung:

$$\overline{P}_W = \frac{U_{eff}^2 \cdot R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{U_{eff}^2 \cdot R_2}{R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2}$$

Wie $R_1$ und $R_2$ gewählt werden müssen, um auch in diesem Fall die Wirkleistung zu optimieren, lässt sich an der Ableitung der Effektivleistung nach $R_2$ erkennen:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{P}_W}{\mathrm{d}R_2} = \frac{U_{eff}^2 (R_1+R_2)^2 - U_{eff}^2 R_2 \cdot 2(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)^4} = 0$$

Daraus folgt: $R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2 - 2R_1R_2 - 2R_2^2 = R_1^2 - R_2^2 = 0$

oder $R_1 = R_2$

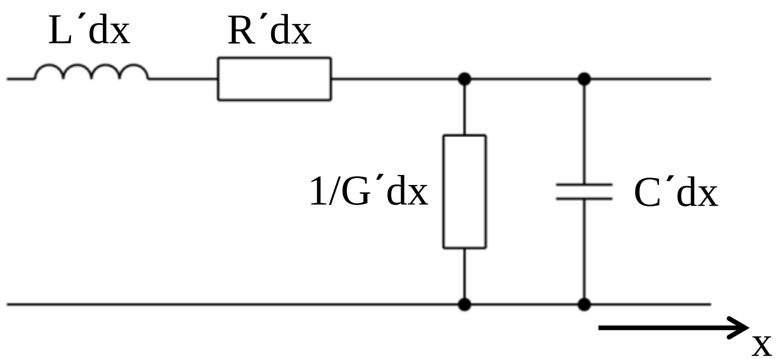
**2. Bedingung: Die Wirkwiderstände von $Z_1$ und $Z_2$ müssen gleich groß sein!**

## 5.2.5 Impedanz eines Kabels

### Einführung:

- Die Kabelimpedanz wird auch als Leitungswellenwiderstand bezeichnet
- Sie hat Einfluss auf die Signalausbreitung bei hochfrequenten Signalen bzw. Signalen mit hochfrequenten Anteilen (z. B. Spannungspuls oder Schaltvorgang)
- Die Kabelimpedanz ist von der Länge des Kabels unabhängig
- In der Regel ist die Kabelimpedanz ein rein reeller Wert

### Ersatzschaltbild einer elektrischen Leitung:




Die angegebenen Größen sind auf die Länge bezogene "Beläge":

$$\left.\begin{array}{l}\text{R´: Widerstand / } dx\\ \text{L´: Induktivität / } dx\\ \text{C´: Kapazität / } dx\\ \text{G´: Leitfähigkeit / } dx\end{array}\right\}\ \text{Leitungsbeläge}$$

**Ziel:** Berechnung der Impedanz dieser Leitung $Z_L(\omega)=\dfrac{U}{I}$

Änderung der Spannung entlang $dx$ : $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=-(R'+\mathrm{i}\omega L')\cdot I$ (1)

Änderung des Stroms entlang $dx$ : $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}=-(G'+\mathrm{i}\omega C')\cdot U$ (2)

Um die beiden Gleichungen zu kombinieren, leiten wir (1) noch einmal nach $x$ ab:

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}=-(R'+\mathrm{i}\omega L')\cdot\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}=(R'+\mathrm{i}\omega L')\cdot(G'+i\omega C')\cdot U \quad (3)$$

Man erhält eine lineare DGL zweiter Ordnung, für die ein exponentieller Ansatz gewählt wird:

$$U = a \cdot \exp(\gamma \cdot x) \qquad \frac{dU}{dx} = a \cdot \gamma \cdot \exp(\gamma \cdot x) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} = a \cdot \gamma^2 \cdot \exp(\gamma \cdot x) = \gamma^2 \cdot U \tag{4}$$

mit $\gamma = \sqrt{(R' + i\omega L')(G' + i\omega C')}$

Um die Impedanz *(U/I)* berechnen zu können, benötigen wir noch einen Ausdruck für *I*.
Aus (1) erhält man:

$$I = -\frac{1}{R' + \mathrm{i}\omega L'} \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{R' + \mathrm{i}\omega L'} \cdot a \cdot \gamma \exp(\gamma \cdot x)$$

$$= -\underbrace{\sqrt{\frac{G' + \mathrm{i}\omega C'}{R' + \mathrm{i}\omega L'}}}_{1/Z_L} \cdot \underbrace{a \cdot \exp(\gamma \cdot x)}_{U} \qquad (\gamma \text{ eingesetzt})$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{R' + \mathrm{i}\omega L'}{G' + \mathrm{i}\omega C'}}$$ Impedanz /Leitungswellenwiderstand

für ω → 0 (Gleichstrom) $Z_L = \sqrt{\frac{R'}{G'}}$

für ω → ∞ $Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$

Die Impedanz für $\omega \to \infty$, der sog. Wellenwiderstand, ist keine Größe, die man mit einem Ohmmeter nachmessen könnte, sondern ein für eine Leitung charakteristischer Wert in Ohm, der sich aus dem Verhältnis von Wechselspannung und –strom ergibt. Wie das folgende Beispiel zeigt, hängt die Impedanz auch nicht von der Länge der Leitung ab. Sogar das Vakuum hat eine Impedanz, die ca. 377 Ohm beträgt.

## Berechnung der Impedanz eines Koaxialkabels

Für die Impedanz bei hohen Frequenzen gilt: $Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$

$R_1$ = Radius des Innenleiters
$R_2$ = Radius des Außenleiters
$l$ = Länge des Kabels

### Berechnung von $L'$:

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r}$ $\qquad \phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$

(Magnetfeld eines langen geraden Leiters)

$$\phi = l \int_{R_1}^{R_2} B(r) dr = l \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = l \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Selbstinduktion $\phi = L \cdot I$

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\phi}{I \cdot l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

### Berechung von $C'$:

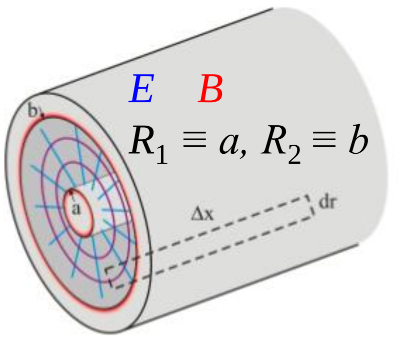
$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}$ $\qquad \lambda = \frac{Q}{l}$

(elektrisches Feld einer Linienladung)

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Kapazität = Ladung / Spannung

$$C' = \frac{\lambda}{U} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$




$$Z_L = \sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

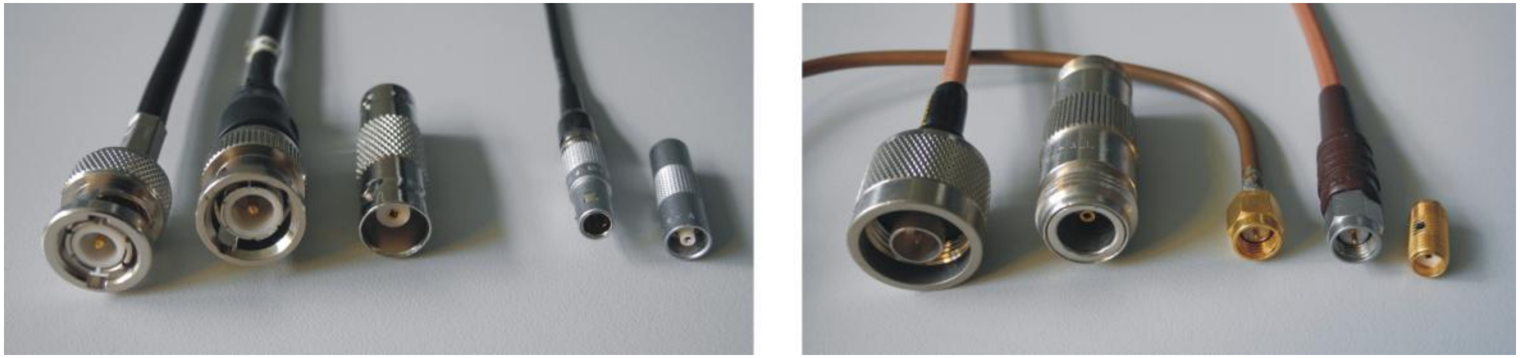
unabhängig von der Länge und der Frequenz! Für $\mu_r = \varepsilon_r = 1$:

$$Z_L = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{6,28} \sqrt{\frac{1,26 \cdot 10^{-6}\ \text{VsVm}}{8,85 \cdot 10^{-12}\ \text{AmAs}}} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 60\ \Omega \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

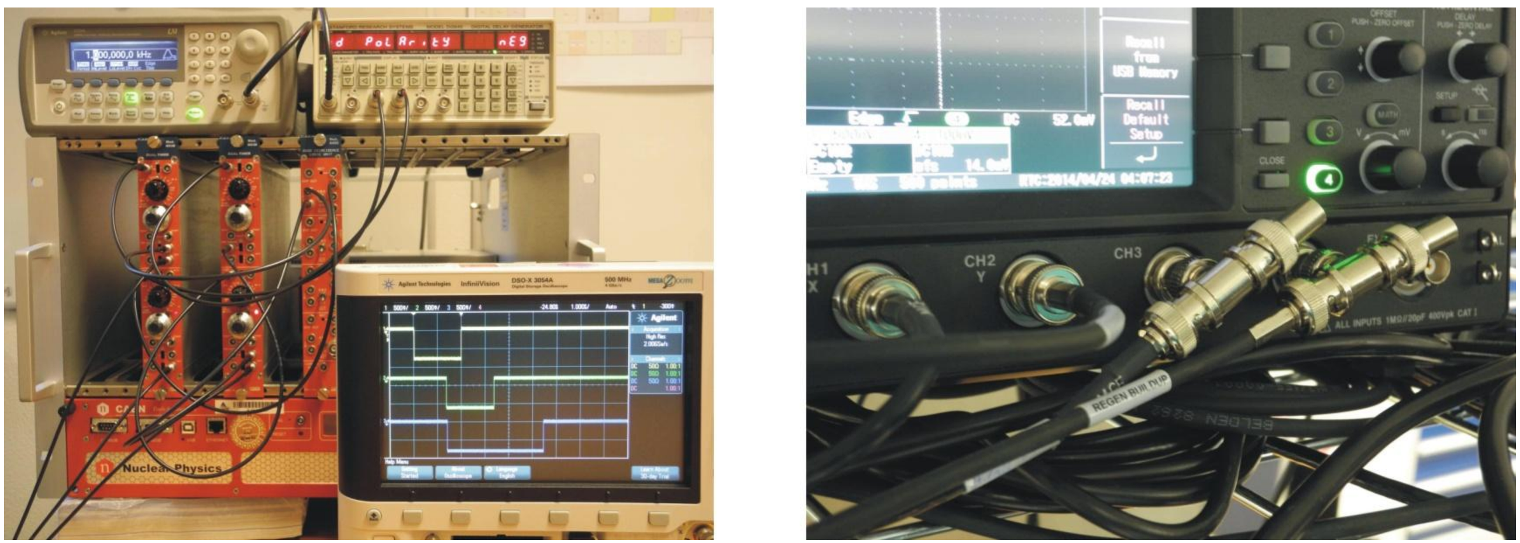
$$R' \propto \frac{1}{2\pi R_1} + \frac{1}{2\pi R_2} \qquad \text{Optimiere} \quad \frac{R}{Z} \propto \frac{1/R_1 + 1/R_2}{\ln(R_2/R_1)} \quad \rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} \approx 3,6$$

Umfang statt Fläche wegen des Skin-Effekts
(hochfrequente Ströme nur an den Oberflächen)

Mit ln(3,6) ≈ 1,3 und mit $\mu_r \approx 2,4$ (Polyäthylen als Abstandhalter) ergibt sich **50 Ω** als typische Impedanz.

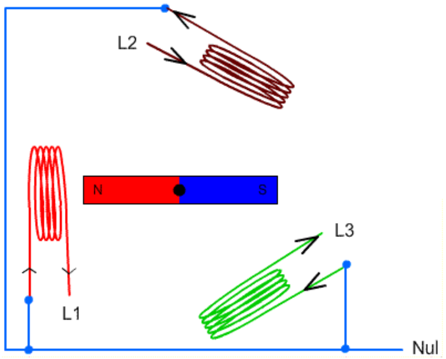


Typische koaxiale Laborkabel (von links nach rechts): Zwei BNC-Stecker ("Männchen") an RG-58-Kabeln, BNC-I-Stück ("Weibchen"-"Weibchen"), LEMO-Stecker an RG-174-Kabel und LEMO-I-Stück, N-Stecker, N-I-Stück, SMA-Stecker mit "*semi rigid*" und flexiblem Kabel sowie SMA-I-Stück. Die Impedanz ist jeweils 50 Ω. Manche Videokabel sehen BNC-Kabeln ähnlich, haben aber eine Impedanz von 75 Ω. Andere häufig verwendete Kabel: Einzelne Leiter z.B. mit Bananensteckern, verdrilltes Leiterpaar ("*twisted pair*"), Flachbandkabel.



Links: Typischer Laboraufbau mit NIM-Modulen (*Nuclear Instrumentation Module*) und BNC- sowie LEMO-Kabeln. Rechts: BNC-Kabel mit T-Stücken und 50-Ohm-"Abschlusswiderständen" zur Impedanzanpassung an einem Oszilloskop. Wenn man die Inpedanzanpassung unterlässt (z.B. 1-MΩ-Abschluss an einem Oszilloskop), wird ein Teil des einlaufenden Pulses reflektiert, was die Pulsform und Pulshöhe stark verfälschen kann.

## 5.3 Drehstrom, Mehrphasenwechselstrom




Mehrere (hier: $N = 3$) Wechselspannungen gleicher Frequenz und äquidistanter Phasenverschiebung $2\pi/N$ (hier: 2,09 rad oder 120°)

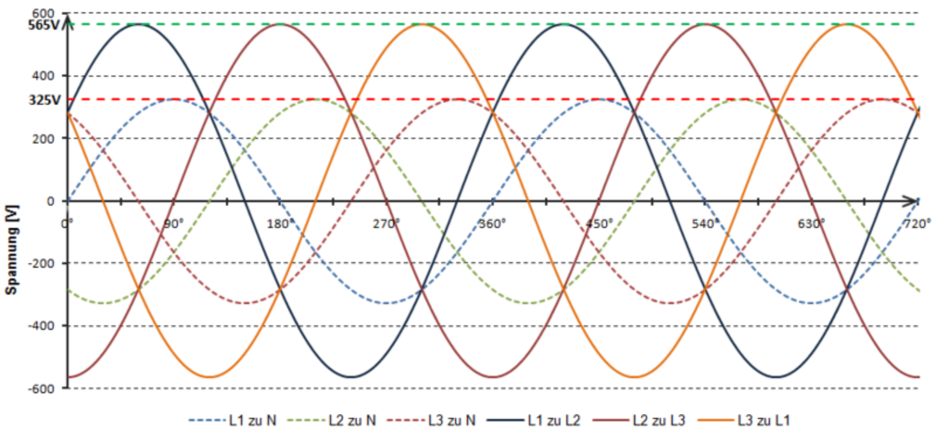
$$U_n = U_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - 2\pi \frac{n-1}{N}\right)$$

Relativspannung zwischen zwei benachbarten Anschlüssen (sog. "Phasen"):

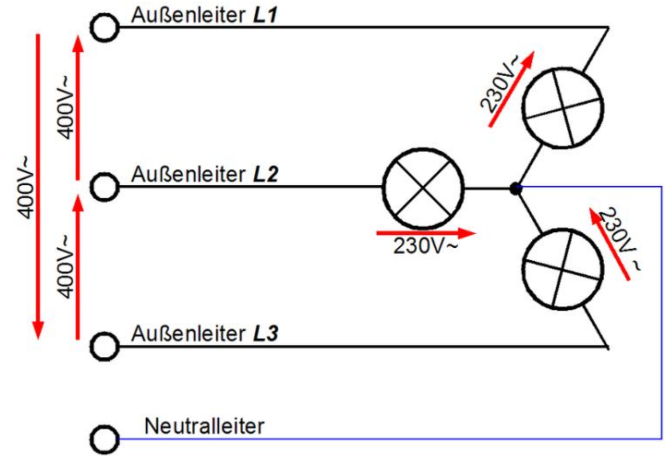
$$U_1 - U_2 = U_0 \cdot \{\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega \cdot t - 2\pi/3)\} = \sqrt{3} \cdot U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \pi/6)$$

z.B. Norm in Europa (Abweichung + 6% /–10%): Amplitude pro "Phase" 325 V (Effektivspannung 230 V), Relativspannung 563 V (Effektivspannung 398 V).

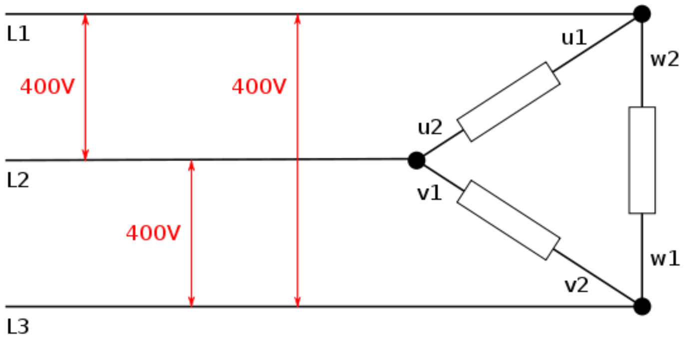
Strom wird in die Haushalte als Drehstrom geliefert und im Elektroverteiler ("Sicherungskasten") aufgeteilt. Ein Vorteil besteht in der geringeren Anzahl von Leitungen (4 statt 6). Außerdem kann man Geräte verschiedener Spannung betreiben (230 V und 398 V effektiv).



Sternschaltung: Wenn die Widerstände der Verbraucher gleich sind, ist der Strom durch den Neutralleiter (Nullleiter) null, wie man z.B. mit einem Zeigerdiagramm der Ströme sehen kann, und man könnte den Neutralleiter weglassen.




Bei der Dreieckschaltung ist die Summe der Spannungen immer null (Maschenregel).




## Modell eines Drehstrommotors (Versuch an der Uni Hamburg)

Die drei Spulen bewirken ein horizontales Magnetfeld, dessen Richtung mit der Netzfrequenz rotiert. In einem Aluminiumring wird ein Strom induziert, dessen Magnetfeld bewirkt, dass der Ring sich dreht (links). In einem Kurzschlußläufer-Motor sind mehrere Ringe zu einer käfigartigen Struktur kombiniert. Auch eine Kugel, die mit Alufolie umwickelt ist, kann in Rotation versetzt werden (rechts).