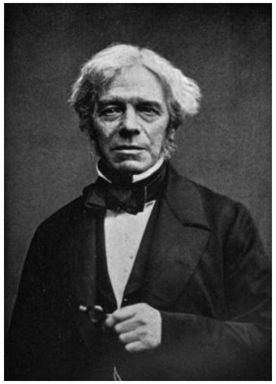
4 Zeitlich veränderliche Felder

4.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

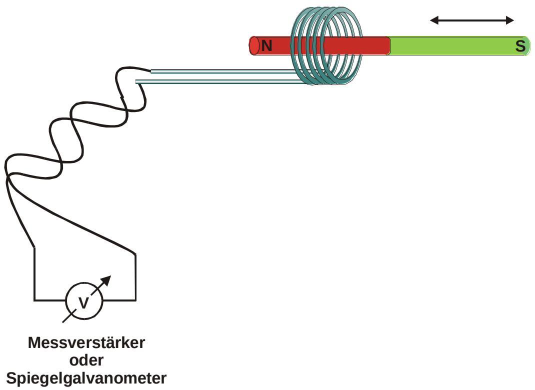


Michael Faraday
1791-1867

Michael Faraday 1831 (aber auch Joseph Henry und Hans Christian Ørstedt):
Elektrischer Strom durch Magnetismus, Grundlage der Stromwirtschaft

Eine Spannung wird in einer Spule "induziert", wenn sich der magnetische Fluss (Skalarprodukt aus *B*-Feld und Flächenvektor) durch die Spule ändert:
- Änderung des Magnetfelds durch Nähern/Entfernen eines Permanentmagneten oder durch Änderung des Stroms in einer zweiten benachbarten Spule
- Änderung der Spulenfläche durch Zusammendrücken/Auseinanderziehen/Drehen oder Änderung der Windungszahl.

Je schneller die Änderung, desto höher die induzierte Spannung



$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\Phi_m$$ Faradaysches Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int \text{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{A}$$ (Satz von Stokes)

$$\rightarrow \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\Phi_m$$

$$\rightarrow \quad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

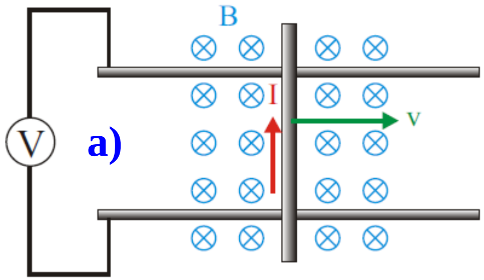
Dieses *E*-Feld ist nicht konservativ. Ein elektrostatisches Potenzial gibt es nur für ein *E*-Feld, das durch statische Ladungen erzeugt wird.
Anmerkung: Die Induktionsspannung wird manchmal auch als "elektromotorische Kraft" (*electromotive force, emf*) bezeichnet.

Beispiel: rotierende Spule im Magnetfeld

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\cdot B\cdot N\cdot A_1\cdot\cos(\omega t) = B\cdot N\cdot A_1\cdot\omega\cdot\sin(\omega t)$$

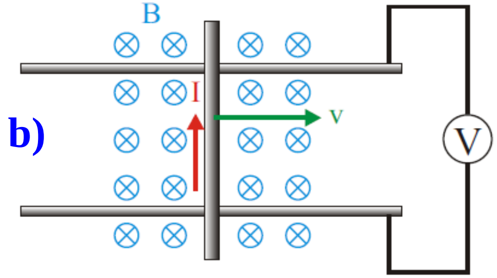
N: Windungszahl
A_1: Fläche einer Windung

a) Stab bewegt sich nach rechts, Fluss durch die Schleife vergrößert sich. Vom Strom I bewirktes Feld in der Schleife ist dem äußeren Feld entgegengesetzt.



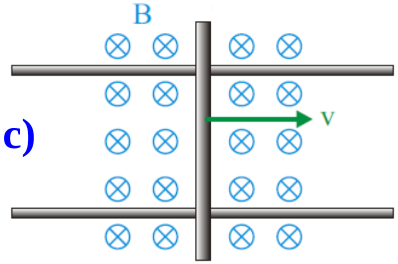
b) Stab bewegt sich nach rechts, Fluss durch die Schleife verkleinert sich. Vom Strom I bewirktes Feld in der Schleife ist dem äußeren Feld richtungsgleich.
Mit Stablänge b:

$$U_{\text{ind}} = -B \cdot \frac{dA}{dt} = -B \cdot b \cdot v$$



c) Stab bewegt sich nach rechts, die Lorentzkraft wirkt auf bewegte Elektronen, so dass eine Spannung (Arbeit pro Ladung) zwischen den Enden entsteht:

$$U = \frac{W}{q} = \frac{F \cdot b}{q} = \frac{q \cdot v \cdot B \cdot b}{q} = B \cdot b \cdot v$$

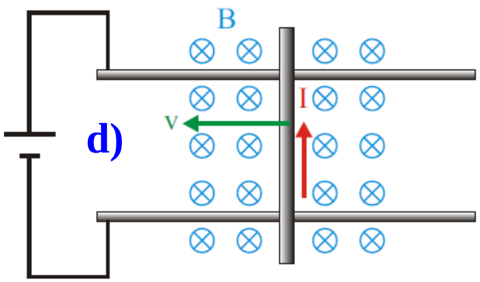


d) Strom fließt durch den Stab, die Kraft auf den strom-durchflossenen Leiter bewegt ihn nach links.

Beispiel: Flugzeug im Erdmagnetfeld

Boeing 747, Spannweite b = 70 m, v = 1000 km/h = 278 m/s
Erdmagnetfeld B = 0,05 mT

Annahme: v senkrecht zu B
Ergebnis: Induzierte Spannung zwischen den Flügelenden ca. 1 V



4.2 Die Lenzsche Regel

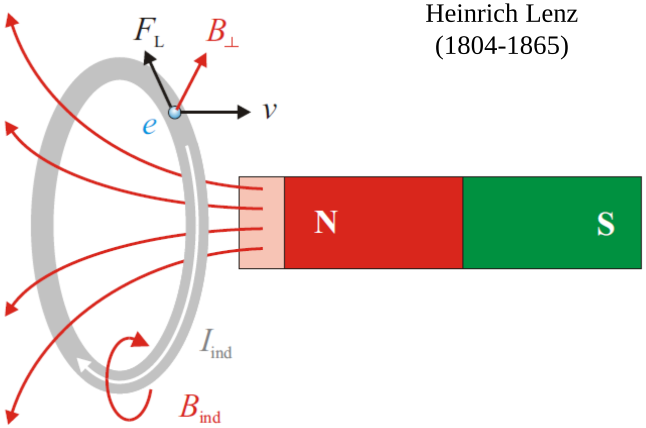
Heinrich Lenz
(1804-1865)

Der durch eine induzierte Spannung fließende Strom ist so gerichtet, dass er ein Magnetfeld erzeugt, das der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.

Beispiel:
Sog. "Wirbelströme" bremsen die Bewegung einer metallischen Scheibe durch ein Magnetfeld - wird z.B. als Fahrzeugbremse verwendet ("Wirbelstrombremse")

Konsistent mit der Lorentzkraft. Beispiel:

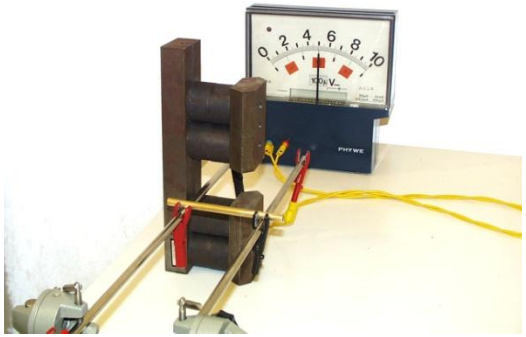
Ein Ring bewegt sich auf den Nordpol zu, d.h. Elektronen bewegen sich im Magnetfeld und erfahren eine Lorentzkraft, wobei es auf die Feldkomponente senkrecht zur Bewegung ankommt (3-Finger-Regel der linken Hand, weil Elektronen negativ sind). Aus der resultierenden (technischen) Stromrichtung und der Rechte-Hand-Regel ergibt sich ein Magnetfeld, das dem zunehmenden Feld des Magneten entgegensteht.



Versuche

Ein Ring springt beim Einschalten des Magneten aufgrund des Induktionsstroms nach oben (Lenzsche Regel), ein geschlitzter Ring bleibt liegen.

An einem Leiter, der durch ein Magnetfeld bewegt wird, wird eine Spannung induziert und es fließt ein Strom (Generator). Legt man an den Leiter eine äußere Spannung an, bewegt er sich (Motor).



Das Betatron

Das durch Induktion erzeugte elektrische Feld hat eine Rotation $\neq$ 0, d.h. ein geladenes Teilchen kann auf einer Kreisbahn Energie gewinnen. Beim Betatron (Donald Kerst 1940) wird durch Änderung eines *B*-Felds eine Beschleunigungsspannung erzeugt:

$$U = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A} = 2\pi \cdot R \cdot E = \pi \cdot R^2 \cdot \langle \dot{B} \rangle$$

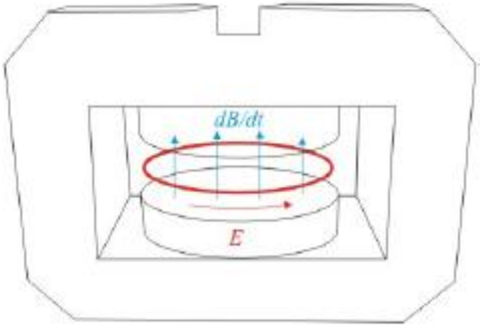
$$E = \frac{1}{2} R \cdot \langle \dot{B} \rangle \quad \rightarrow \quad F = \dot{p} = \frac{e}{2} R \cdot \langle \dot{B} \rangle$$

Das B-Feld dient andererseits dazu, die Elektronen auf ihrer Kreisbahn zu halten: Zentripetalkraft = Lorentzkraft

$$p = e \cdot R \cdot B_R \quad \rightarrow \quad \dot{p} = e \cdot R \cdot \dot{B}_R$$

Vergleich der beiden Ausdrücke $\dot{B}_R = \frac{1}{2} \langle \dot{B} \rangle$

Wideröe-Bedingung (nach Rolf Wideröe 1923): Die Änderung des *B*-Felds auf der Kreisbahn muss genau halb so groß sein wie die Änderung des mittleren eingeschlossenen Felds, das die Induktionsspannung hervorruft.



4.3 Selbstinduktion und gegenseitige Induktion

Selbstinduktion

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt}\Phi_m$$

Für eine gegebene Leiterschleife oder Spule ist der magnetische Fluss proportional zum Strom.

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = L \cdot I$$

$$U_{\text{ind}} = -L \cdot \frac{dI}{dt} \qquad [L] = 1\ \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = 1\ \text{H}\ \ (\text{Henry})$$

Selbstinduktionskoeffizient, Induktivität

Ändert sich der Strom durch die Spule, so wird eine Induktionsspannung induziert. Dies nennt man "Selbstinduktion", also Induktion aufgrund des Spulenfelds, nicht eines äußeren Magnetfelds.

Induktivität einer Spule

Magnetfeld einer Spule mit Windungsdichte *n*:

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I \qquad \text{mit} \qquad n = \frac{N}{l} \qquad \Phi_m = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot A$$

$$U_{\text{ind}} = -n \cdot l \cdot \frac{d\Phi_m}{dt} = -n \cdot l \cdot \mu_0 \cdot n \cdot \frac{dI}{dt} \cdot A = -L \cdot \frac{dI}{dt} \qquad \rightarrow \qquad L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot l \cdot A = \mu_0 \cdot n^2 \cdot V$$

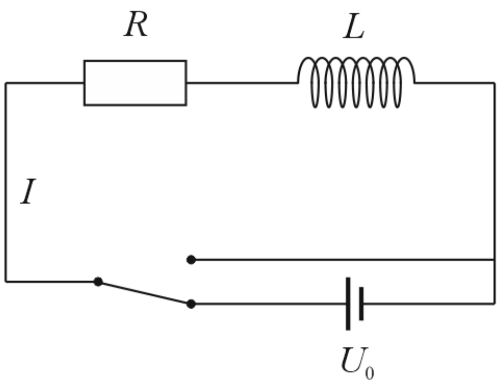
Energiedichte im Feld einer Spule

$$W_m = \int_0^\infty |U| \cdot I \cdot dt = L \cdot \int_0^\infty \frac{dI}{dt} \cdot I \cdot dt = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2 \qquad \text{weil} \qquad \frac{d}{dt} I \cdot I = I \cdot \dot{I} + \dot{I} \cdot I = 2 \cdot I \cdot \dot{I}$$

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_0 \cdot n^2 \cdot V \cdot I_0^2 \qquad w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0} \qquad \text{mit} \qquad B = \mu_0 \cdot n \cdot I_0 \qquad \text{bzw.} \qquad w_m = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H$$

Einschalten einer Stromquelle

Spule mit Induktion L und Widerstand R im Stromkreis:
Die Induktionsspannung wird hier als Teil der Quellenspannung behandelt, hat also dasselbe Vorzeichen wie U_0 in der Maschenregel.



$$U_0 + U_{ind} = U_R \quad \rightarrow \quad U_0 = R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_0 - R \cdot I}{L} = R \cdot \frac{U_0 / R - I}{L}$$

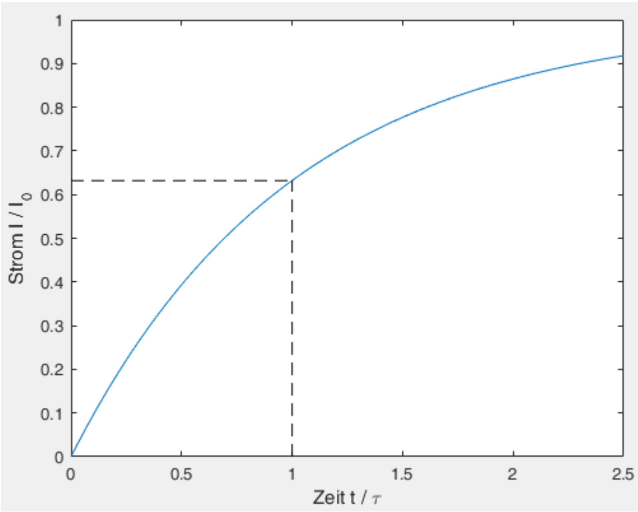
$$\int_0^I \frac{dI}{U_0 / R - I} = \frac{R}{L} \cdot \int_0^t dt \qquad \text{def. } I_0 = \frac{U_0}{R}$$

$$-\ln\left(U_0 / R - I\right)\Big|_0^I = -\ln\left(I_0 - I\right) + \ln\left(I_0\right) = -\ln\left(\frac{I_0 - I}{I_0}\right) = \frac{R}{L} \cdot t$$

(Minus wegen des Minuszeichens vor I im Integranden)

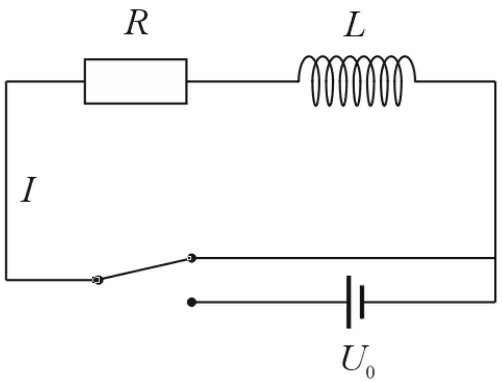
$$\frac{U_0 / R - I}{U_0 / R} = \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)$$

$$I(t) = I_0 \cdot \left(1 - \exp\left(-t / \tau\right)\right) \qquad \text{mit} \qquad \tau = L / R$$



Ausschalten einer Stromquelle

Spule mit Induktion L und Widerstand R im Stromkreis:
Beim Ausschalten sinkt der Strom von I_0 auf $I(t)$



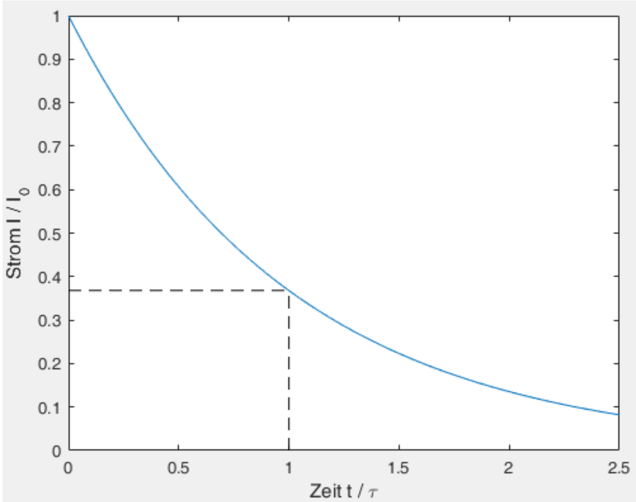
$$0 = U_R - U_{\text{ind}} = R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R \cdot I}{L}$$

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \cdot \int_0^t dt$$

$$\ln(I)\Big|_{I_0}^{I} = \ln(I) - \ln(I_0) = \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L} \cdot t$$

$$I(t) = I_0 \cdot \exp(-t/\tau) \qquad \text{mit} \qquad \tau = L/R$$



Gegenseitige Induktion

Zwei Spulen: Strom durch Spule 1 erzeugt einen magnetischen Fluss durch Spule 2 und umgekehrt

$$\Phi_2 = L_{12} \cdot I_1$$

$$\Phi_1 = L_{21} \cdot I_2 \qquad L_{21} = L_{12}$$

Gegenseitige Induktivität

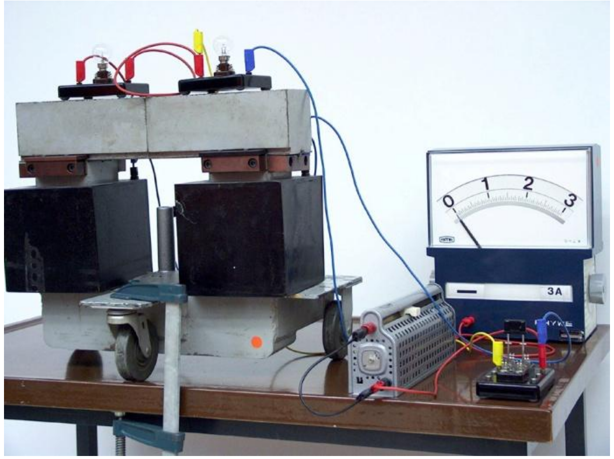
Beim Transformator sorgt ein gemeinsamer Eisenkern dafür, dass praktisch der gesamte magnetische Fluss, den eine Spule 1 (Primärspule) erzeugt, auch durch eine zweite Spule 2 (Sekundärspule) tritt.
Der Eisenkern besteht i.d.R. aus voneinander isolierten Lamellen, um Wirbelströme zu unterdrücken.

$$U_1 + U_{\text{ind}} = 0 \qquad U_1 = -U_{\text{ind}} = N_1 \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} \qquad U_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi_2}{dt}$$

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_2}{dt} \quad \rightarrow \quad U_2 = \pm \frac{N_2}{N_1} \cdot U_1$$

Anmerkung 1: Dies gilt für den unbelasteten Transformator d.h. kein Strom auf der Sekundärseite.

Anmerkung 2: Das Vorzeichen hängt vom Wicklungssinn beider Spulen ab und davon, zwischen welchen Enden der jeweiligen Spule die Spannung gemessen wird.



Versuch

Eine Glühlampe, der eine Spule vorgeschaltet ist, leuchtet beim Einschalten der Spannungsquelle mit Verzögerung auf (vgl. vorige Seite: Schließen eines Stromkreises mit Induktion).

4.4 Der Verschiebungsstrom

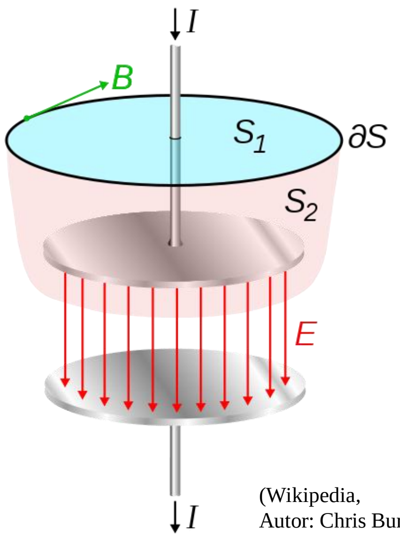
Bisher: $\text{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ und $\text{rot}\,B = \mu_0 \cdot \vec{j}$

Ein Analogon zum Ampèreschen Gesetz (etwa: Rotation E = Stromdichte magnetischer Ladungen) ist mangels magnetischer Monopole nicht zu erwarten. Welche Auswirkung hat aber ein zeitlich veränderliches E-Feld? Außerdem gibt es ein Problem mit dem Ampèreschen Gesetz:

Divergenz der linken Seite: div rot B ist immer null.
Divergenz der rechten Seite: div j ist bei stationären Strömen null, aber nicht im allgemein Fall.

Beispiel für einen nicht-stationären Strom: ein Kondensator wird aufgeladen.
Für Schleife S1 ergibt sich nach dem Ampèreschen Gesetz das B-Feld aus dem eingeschlossenen Strom.
Die "verbeulte" Schleife S2 umschließt jedoch keinen Strom.
Ausweg: Zusatzterm zum Ampèreschen Gesetz

$$\text{rot}\,B = \mu_0 \cdot \left(\vec{j} + \vec{j}_V\right) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



(Wikipedia, Autor: Chris Burks)

"Verschiebungsstrom"

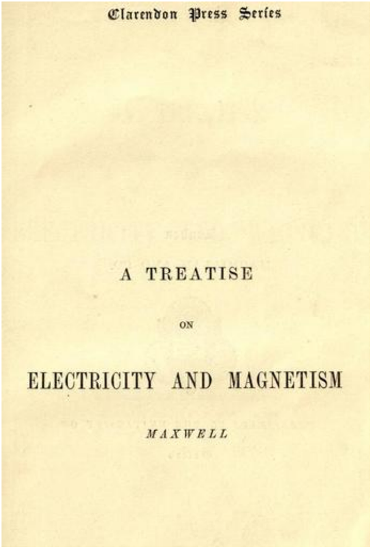
Zur Erinnerung: elektrisches Feld eines Kondensators ist durch die Flächenladungsdichte σ gegeben

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Damit: $$j_V = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$[\sigma] = 1\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \qquad [j_V] = 1\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2\text{s}} = 1\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

Damit sind die Maxwellschen Gleichungen komplett!!



1873

Im Vakuum:

Differenzielle Form

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Integralform

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Übliche Darstellung in Materie:

Differenzielle Form

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Integralform

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} \cdot d\vec{A}$$


James Clerk Maxwell (1831-1879), Katherine Maxwell, Toby