

Nachtrag: Elektromagnetische Welle in Materie

Elektronen der Atome in Materie verhalten sich wie gedämpfte Oszillatoren und Masse m (für kleine Auslenkungen gut erfüllt) und werden durch eine einlaufende elektromagnetische Welle zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Die Auslenkung der Elektronen ergibt zusammen mit der Elementarladung ein Dipolmoment. Über den Ausdruck für die Polarisation wurde für den Brechungsindex und den Absorptionskoeffizienten in Nichtleitern gefunden:

$$n^2 \approx \varepsilon_r = 1 + \frac{e^2 \cdot N / V}{\varepsilon_0 \cdot m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \cdot \gamma}$$

$$\operatorname{Re}(n) \approx \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon_r} \quad \alpha \approx 2 \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\varepsilon_r} \quad \sqrt{\varepsilon_r} \equiv \sqrt{1 + X} \approx 1 + \frac{X}{2} \quad \text{u.s.w.}$$

Elektromagnetische Welle in elektrisch leitender Materie

Bei elektrisch leitender Materie (z.B. Metalle, andere Stoffe wie Graphit, Plasma) gibt es zwei Beiträge zum Brechungsindex, gebundene Elektronen und frei bewegliche Elektronen. Letztere bewirken einen Dämpfungsterm in der Wellengleichung. Angenommen, der Einfluss der freien Elektronen überwiegt. Dann entfällt die Rückstellkraft und obiger Ausdruck wird zu

$$n^2 = 1 - \frac{e^2 \cdot N / V}{\varepsilon_0 \cdot m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - i\omega \cdot \gamma} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega \cdot \gamma}$$

$$\text{Plasmafrequenz: } \omega_p = \sqrt{\frac{q^2 \cdot n}{\varepsilon_0 \cdot m}} \quad q = -e \quad n \equiv \frac{N}{V} \quad \text{Ladungsdichte}$$

Konsequenzen (ohne Rechnung):

- die Dämpfung geschieht durch Stöße zwischen den Elektronen $\gamma = 1 / \tau$ (mittl. Zeit zwischen Stößen)
 - kleine Frequenz (Infrarot und sichtbar): starke Dämpfung, kleine Eindringtiefe in Nanometerbereich.
 - hohe Frequenz (Vakuum-UV): oberhalb der Plasmafrequenz wird Metall durchsichtig.
- (vgl. Ionosphäre/Heaviside-Schicht: bis einige MHz undurchsichtig, im sichtbaren Bereich durchsichtig).

Nachtrag: Nichtlineare Optik

In der traditionellen Optik genügt es i.d.R., einen linearen Zusammenhang zwischen Polarisation und elektrischem Feld anzunehmen, z.B. in isotropen Medien:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

(in anisotropen Medien wird aus der Suszeptibilität ein Tensor und die Polarisation ergibt sich durch Summieren über die drei Raumrichtungen). Seit dem Aufkommen von Strahlungsquellen mit sehr hohen elektrischen Feld (GV/m bis TV/m) wie gepulsten Hochleistungslasern oder Freie-Elektronen-Lasern ist es nicht mehr ungewöhnlich, dass auch Terme höherer Ordnung eine Rolle spielen:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \dots \right)$$

Das elektrische Feld sei $E_x \cdot \cos(\omega t)$. Dann enthält der zweite Term einen Ausdruck

$$\cos^2(\omega t) = 1/2 \{1 + \cos(2\omega t)\}$$

mit der doppelten Frequenz. Es ist gängige Praxis, Laserpulse durch ein Material mit geeignetem $\chi^{(2)}$ zu schicken (z.B. BBO, Beta-Bariumborat), um die Frequenz des Lichts zu verdoppeln (SHG, *second-harmonic generation*), z.B. grüner Laserpointer mit diodengepumptem Festkörperlaser bei 1064 nm Wellenlänge und Frequenzverdopplung.

Der dritte Term der Reihenentwicklung ist proportional zu $S \cdot \vec{E}$ mit der Energiestromdichte $S \sim \vec{E}^2$. Damit werden Polarisation und Brechungsindex proportional zur Intensität von Laserstrahlung, oft beschrieben durch das sog. B-Integral

$$B = \frac{2\pi}{\lambda} \int n_2 \cdot I(z) \cdot dz$$

Hier ist n^2 der nichtlineare Anteil des Brechungsindex in m^2/W , $I(z)$ die Intensität in W/m^2 und λ die Wellenlänge, und B gibt die Phasenverschiebung des Lichts durch den nichtlinearen Effekt (auch elektrooptischer Kerr-Effekt genannt) an. Zum Beispiel ist beim Durchgang eines Laserpulses mit gaußförmigen Profil die Verschiebung stärker als am Rand, was eine intensitätsabhängige Fokussierung bewirkt (Kerr-Linse).

Wiederholung: Geführte elektromagnetische Wellen

Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

- freie Ausbreitung im Raum
- entlang von Leitungen
 - ... doppelter Draht (Lecher-Leitung)
 - ... konzentrische Leitung (Koaxialleitung)
 - ... Hohlleiter

Experiment: Lecher-Leitung

Dezimeterwellensender ($f = 434 \text{ MHz}$, $\lambda = 69 \text{ cm}$),
 Ende der Leitung gegenüber der Sendeantenne geschlossen,
 anderes Ende der Leitung offen oder geschlossen.

Offenes Ende: Strom null

Geschlossenes Ende: Spannung null (keine Potenzialdifferenz)

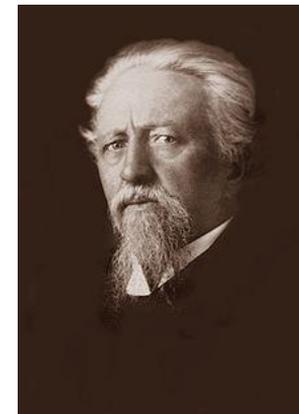
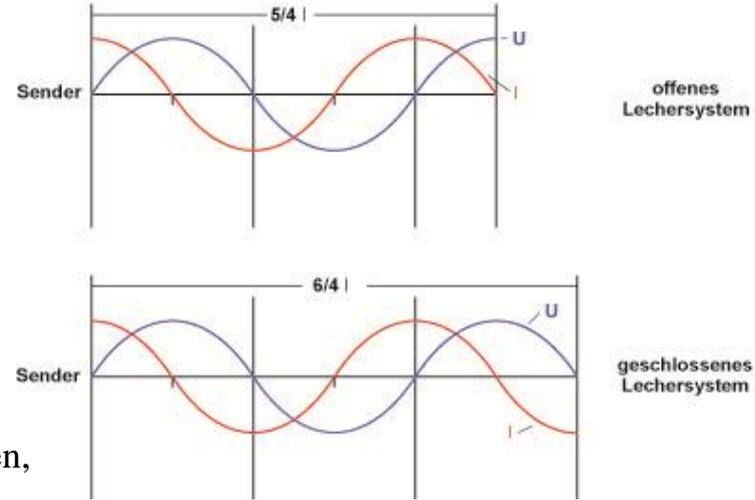
Durch Überlagerung der Welle entlang der Leitung und der am Ende reflektierten Welle entsteht eine stehende Welle, wenn die Länge L der Leitung und die Wellenlänge λ zu den Randbedingungen passen: beide Enden geschlossen $L = n \cdot \lambda/2$

ein Ende geschlossen, anderes Ende offen $L = n \cdot \lambda/2 \pm \lambda/4$

Glühlampe mit geschlossener Schleife zeigt Stromverteilung,
 Glühlampe mit offenen Enden zeigt Spannungsverteilung.

Produkt aus Frequenz und Wellenlänge = Lichtgeschwindigkeit c

Abschluss der Lecherleitung mit 75 Ohm: keine stehenden Wellen.



Ernst Lecher
(1856 – 1926)

Wiederholung: Impedanz einer Leitung

Ersatzschaltbild einer elektrischen Leitung:

Ziel: Berechnung der Impedanz dieser Leitung, die im allgemeinen Fall frequenzabhängig ist: $Z_L(\omega) = \frac{U}{I}$

Änderung der Spannung entlang dx :

$$\frac{dU}{dx} = -R' \cdot I - L' \cdot \frac{dI}{dt} \approx -L' \cdot \frac{dI}{dt} \quad (\text{Verluste vernachlässigt})$$

Änderung des Stroms entlang dx :

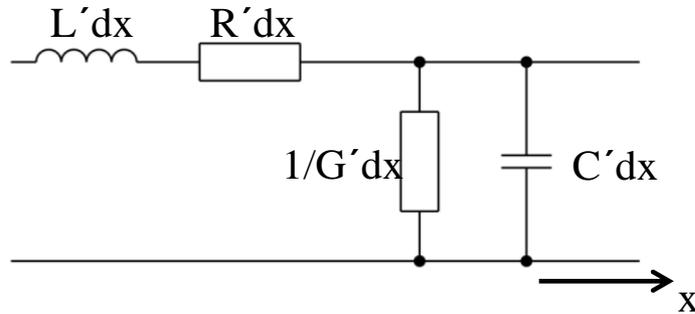
$$\frac{dI}{dx} = -G' \cdot U - C' \cdot \frac{dU}{dt} \approx -C' \cdot \frac{dU}{dt} \quad (Q = CU \text{ und } G \text{ vernachlässigt})$$

Beide Gleichungen kombiniert:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dx^2} &= -L' \cdot \frac{d^2I}{dt \cdot dx} \\ \frac{d^2I}{dx \cdot dt} &= -C' \cdot \frac{d^2U}{dt^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2U}{dx^2} = L'C' \cdot \frac{d^2U}{dt^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2U}{dx^2} + \omega^2 L'C' \cdot U = 0 \end{aligned}$$

mit dem allgemeinen Ansatz für die **Spannung:** $U = a_1 \exp\{i(\omega t - kx)\} + a_2 \exp\{i(\omega t + kx)\}$

Damit gilt auch $\frac{d^2U}{dx^2} - k^2 \cdot U = 0 \quad \rightarrow \quad k^2 = -\omega^2 L'C' \quad k = \mp \sqrt{(i\omega L')(i\omega C')}$



Auf Länge bezogene Größen ("Beläge"):

- R': Widerstand / dx
- L': Induktivität / dx
- C': Kapazität / dx
- G': Leitfähigkeit / dx

durch Vergleich mit oben

Strom:

$$I = -\frac{1}{i\omega L'} \frac{dU}{dx} = \frac{1}{i\omega L'} \left(-a_1 \cdot k \cdot \exp\{i(\omega t - kx)\} + a_2 \cdot k \cdot \exp\{i(\omega t + kx)\} \right)$$

$$I = \frac{\sqrt{(i\omega L')(i\omega C')}}{i\omega L'} \left(-a_1 \cdot \exp\{i(\omega t - kx)\} + a_2 \cdot \exp\{i(\omega t + kx)\} \right)$$

$$I = \sqrt{\frac{C'}{L'}} \left(-a_1 \cdot \exp\{i(\omega t - kx)\} + a_2 \cdot \exp\{i(\omega t + kx)\} \right) = -\frac{a_1}{Z} \exp\{i(\omega t - kx)\} + \frac{a_2}{Z} \exp\{i(\omega t + kx)\}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad L' \text{ und } C' \text{ für Koaxialkabel vgl. Skript 08.06.:} \quad \phi = L' \cdot l \cdot I = l \int_{R_1}^{R_2} B(r) \cdot dr = \dots$$

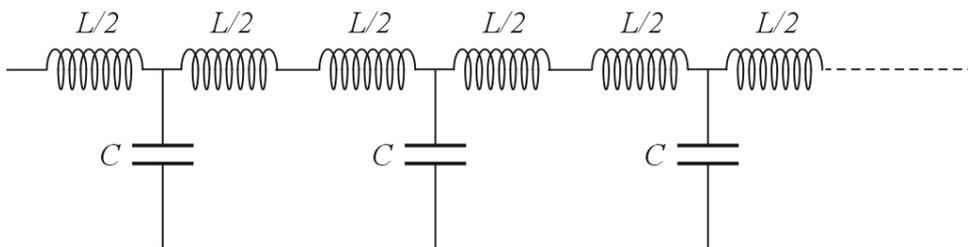
$$U = \frac{Q}{C' \cdot l} = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \cdot dr \dots$$

Impedanz einer Leitung nach Feynman II Ch. 22-6:

Netzwerk aus vielen (aber endlichen) seriellen und parallelen komplexen Widerständen $L/2$ und C :

ergibt eine Impedanz von $Z_0 = \sqrt{L/C - \omega^2 L^2 / 4}$

Grenzfall $L \rightarrow 0$ und $C \rightarrow 0$ ergibt $Z_0 = \sqrt{L/C}$

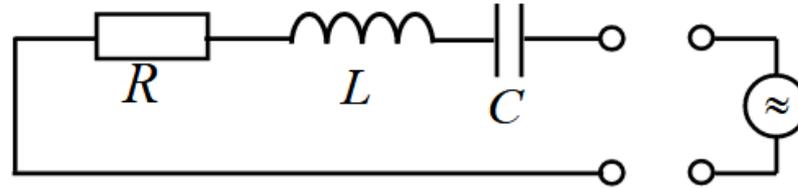


Wiederholung: Schwingkreis

Widerstand R (falls 0: ungedämpft)

Induktivität L

Kapazität C



Es gibt zwei Energiespeicher: Kondensator (Spannung $\rightarrow E$ -Feld), Spule (Strom $\rightarrow B$ -Feld)
 vgl. mechanisches Pendel: Spannung entspricht potentieller Energie, Strom entspricht kinetischer Energie,
 Widerstand entspricht Reibung. Daher ist die Mathematik ähnlich und es gibt eine Schwingung mit einer charakteristischen Frequenz und eine zeitlichen Abnahme der Amplitude.

Zwei Szenarien:

(i) der Schwingkreis schwingt frei mit Frequenz ω_0 (rechte Seite der folgenden Gleichungen = 0)

(ii) es gibt einer anregende Wechselspannung mit Frequenz ω_E

Ansatz: Maschenregel $U_L + U_R + U_C = U_0 \exp(i\omega_E t)$

Ausdrücke eingesetzt $L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = U_0 \exp(i\omega_E t)$ Diese Ausdrücke verbinden die Spannung mit den Eigenschaften der Elemente: R, L, C

Umformen mit $I = \dot{Q}$ $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = U_0 \exp(i\omega_E t)$

Die Differentialgleichung mit $Q(t)$ beschreibt einen gedämpften harmonischen Oszillator (vgl. Mechanik).

Alternativ kann man das durch $I(t)$ ausdrücken, weil das eher eine messbare Größe ist. Also ableiten:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = U_0 i\omega_E \exp(i\omega_E t)$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = \frac{i\omega_E}{L}U_0 \exp(i\omega_E t)$$

Zwei Möglichkeiten:

1) Differentialgleichung umschreiben in $\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = \frac{i\omega_E}{L} U_0 \exp(i\omega_E t)$

und aller Ergebnisse aus der Mechanik verwenden oder

2) Neu ausrechnen: Lösungsansatz und zunächst freie Schwingung betrachten

$$I(t) = A \cdot \exp\{\lambda t\} \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit pq-Formel $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \equiv -\gamma \pm \delta$

ergibt sich die allgemeine Lösung zu $I(t) = A_1 \cdot \exp\{-(\gamma + \delta)t\} + A_2 \cdot \exp\{-(\gamma - \delta)t\}$

γ ist reell und beschreibt eine Dämpfung, δ kann reell oder imaginär sein. Im letzteren Fall liegt eine Schwingung vor. Man unterscheidet 3 Fälle:

a) **Kriechfall:** Große Dämpfung, δ reell: $\gamma^2 > \omega_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$

Lösung hängt von den Anfangsbedingungen ab, z.B. Schalter wird umgelegt

$$I(0) \equiv I_0 = 0 \quad 0 = A_1 + A_2 \quad \rightarrow \quad A_2 = -A_1$$

$$\dot{I}(0) \equiv \dot{I}_0 \neq 0 \quad \dot{I}_0 = (\gamma + \delta)A_2 - (\gamma - \delta)A_2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{\dot{I}_0}{2\delta}$$

$$I(t) = \frac{\dot{I}_0}{\delta} \cdot \exp(-\gamma t) \cdot \frac{1}{2} [\exp\{\delta \cdot t\} - \exp\{-\delta \cdot t\}] = \frac{\dot{I}_0}{\delta} \cdot \exp(-\gamma t) \cdot \sinh(\delta t)$$

b) **Aperiodischer Grenzfall:** $\delta = 0 \quad \gamma^2 = \omega_0^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$

Zum Beispiel $I_0 = 0 \quad \dot{I}_0 \neq 0 \quad \rightarrow \quad I(t) = \dot{I}_0 \cdot t \cdot \exp(-\gamma t)$

c) **Gedämpfte Schwingung:** ist von größerer Relevanz $\delta = i\omega \quad \gamma^2 < \omega_0^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$

Allgemeine Lösung $I(t) = \exp(-\gamma t) \cdot [A_1 \cdot \exp\{i\omega t\} + A_2 \cdot \exp\{-i\omega t\}]$

Hier wird die Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen gerne so ausgedrückt:

$$A_1 = a + ib \quad A_2 = a - ib \quad \rightarrow \quad I(t) = 2|A| \cdot \exp(-\gamma t) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \tan \varphi = b / a$$

wobei a und b von den Anfangsbedingungen abhängen und ω die Schwingungsfrequenz ist.

$$\delta = i\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Sie ist etwas niedriger als die ungedämpfte Frequenz und geht für $\gamma \rightarrow 0$ in diese über.

Die Schwingung nimmt nach der Zeit $T = 1/\gamma$ um den Faktor e ab.

Gedämpfte erzwungene Schwingung:

Schwingung mit konstanten Amplituden U_0 und I_0 (nach Einschwingvorgang) und Erregerfrequenz ω

$$I(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega_E t + \varphi) \quad A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad \tan \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega_E^2}$$

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad \text{Resonanzfrequenz}$$

Gedämpfte erzwungene Schwingung:Wirkleistung im Widerstand R :

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{Z^2} \cdot R = \frac{\{U_0 \cdot \cos(\omega_0 t)\}^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot R \quad \langle P \rangle_{\max} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} \quad \leftarrow \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Wechselstromwiderstände

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Kondensator: Strom eilt Spannung voraus

Spule: Spannung eilt Strom voraus

Wiederholung: Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

$$E_V^\perp = \varepsilon_r \cdot E_D^\perp \quad \leftrightarrow \quad D_V^\perp = D_D^\perp \quad \text{senkrecht auf Grenzflächen} \quad B_1^\perp = B_2^\perp \quad \leftrightarrow \quad \mu_1 \cdot H_1^\perp = \mu_2 \cdot H_2^\perp$$

$$E_V^\parallel = E_D^\parallel \quad \leftrightarrow \quad D_V^\parallel = \frac{1}{\varepsilon} D_D^\parallel \quad \text{parallel zu Grenzflächen} \quad \mu_2 \cdot B_1^\parallel = \mu_1 \cdot B_2^\parallel \quad \leftrightarrow \quad H_1^\parallel = H_2^\parallel$$

Wiederholung: Hilfsfelder D und H

$$[D] = 1 \frac{C}{m^2} \quad [H] = 1 \frac{A}{m}$$

Dielektrika:

Elementare el. Dipole vorhanden (Orientierungspolarisation) oder induziert (Verschiebungspolarisation)

Gesamtes E -Feld

$$\operatorname{div} \vec{E}_D = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E}_D + \vec{P}) = \operatorname{div} \vec{D} = \rho_f \quad \chi = \epsilon_r - 1$$

Polarisationsladungen generell nicht bekannt, D -Feld (Verschiebungsdichte) hängt nur von freien Ladungen ab. Das ist bequem, verlagert aber nur das Problem, wenn man das E -Feld wissen will. Oft stellt sich diese Problem nicht, da nicht Ladungen, sondern Spannungen an metall. Leitern vorgegeben sind.

Beispiel: Unendlich langer Draht mit linearer Ladungsdichte λ , der von einem Isoliermaterial mit Radius R umgeben ist.

$$\int_A \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f = D \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \lambda \cdot L \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot r} \vec{e}_r$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E} \quad \text{im Außenraum: } \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \quad \text{im Isoliermaterial: } \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r}$$

Dia/Para/Ferromagnete:

Elementare el. Dipole vorhanden (Paramagnetismus) oder induziert (Diamagnetismus)

Gesamtes B -Feld

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{j}_f + \vec{j}_m) \quad \rightarrow \quad \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_f \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f$$

Das H -Feld (magnetische Erregung) hängt nur von den freien Strömen ab. Diese Größe ist von praktischer Relevanz, da magnetische Felder oft durch Ströme gegeben sind.

$$\chi_m = \mu - 1$$

Beispiel: Eisenkern mit Gesamtlänge l und Luftspalt der Höhe h , Spule mit n Windungen

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \vec{B} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = (l-h) \cdot H_{\text{Fe}} + h \cdot H_{\text{Luft}} = n \cdot I$$

$$\text{wenn } H_{\text{Fe}} \text{ sehr klein, nicht immer!} \quad \rightarrow \quad H \approx \frac{n \cdot I}{h} \quad \rightarrow \quad B \approx \mu_0 \frac{n \cdot I}{h} \quad \text{im Eisen und an Luft}$$