

Grenzflächen (z.T. Wiederholung)

Beim Übergang von einem Material in ein anderes ändern sich die E/B -Feldkomponenten senkrecht und parallel zur Grenzfläche wie folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \cdot E_1^\perp - \varepsilon_2 \cdot E_2^\perp &= \sigma_f & E_1^\parallel - E_2^\parallel &= 0 \\ B_1^\perp - B_2^\perp &= 0 & \frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel &= K_f \times \vec{n} \end{aligned}$$

Hier ist σ_f die Flächenladungsdichte (in C/m^2) der freien Ladungen, K_f die Flächenstromdichte (in A/m) der freien Ströme, und der Normalvektor n zeigt von Medium 2 nach 1 – siehe Vorlesungen am 25.04. und 30.05., wobei freie Flächenströme nicht betrachtet wurden, da sie bei Ohmschen Leitern nicht vorkommen. Auch im Folgenden sollen weder freie Ladungen noch Ströme an der Grenzfläche vorhanden sein:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \cdot E_1^\perp &= \varepsilon_2 \cdot E_2^\perp & E_1^\parallel &= E_2^\parallel \\ B_1^\perp &= B_2^\perp & \frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel &= \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel \end{aligned}$$

Im Fall der Oberfläche eines Leiters gilt darüber hinaus:

$$\begin{aligned} E^\parallel &= 0 & \text{Äquipotenzialfläche} \\ B^\perp &= 0 & \text{rot } E = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \vec{B} = \text{const} = 0 \end{aligned}$$

Angenommen, eine elektromagnetische Welle trifft senkrecht auf eine perfekt leitende Fläche. Im allgemeinen Fall gilt (bei Abwesenheit freier Oberflächenladungen) für die E -Feldamplituden

$$E_I + E_R = E_T$$

(einfallend reflektiert transmittiert)

Da aber bei einem perfekten Leiter $E_T = 0$ ist, gilt hier: $E_I = -E_R$ (Phasensprung um 180°)

Elektromagnetische Wellen (monochromatisch) in einem Hohlleiter mit beliebigen Querschnitt

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x, y) \\ E_y(x, y) \\ E_z(x, y) \end{pmatrix} \cdot \exp\{i(k_z z - \omega t)\} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x(x, y) \\ B_y(x, y) \\ B_z(x, y) \end{pmatrix} \cdot \exp\{i(k_z z - \omega t)\}$$

erfüllen die Maxwell-Gleichungen und die Bedingungen: $E^{\parallel} = 0 \quad B^{\perp} = 0$

Im Gegensatz zum freien Raum sind die Wellen unter diesen Randbedingungen i. Allg. nicht transversal. Betrachte den obigen Ansatz und zwei Komponenten der folgenden Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ & & \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y &= i\omega B_x & & & \frac{\partial B_z}{\partial y} - ik_z B_y &= -\frac{i\omega}{c^2} E_x \quad (*) \\ & & ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i\omega B_y \quad (**) & & & ik_z B_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -\frac{i\omega}{c^2} E_y \end{aligned}$$

$$E_x = \frac{i}{\omega/c^2} \left\{ \frac{\partial B_z}{\partial y} - ik_z B_y \right\} = \frac{i}{\omega/c^2} \left\{ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{k_z}{\omega} \left(ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right\} \dots \quad (*) \text{ und } (**) \text{ umgeformt und dann } (**) \text{ in } (*) \text{ eingesetzt ...}$$

... und nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i}{\omega^2/c^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) & E_y &= \frac{i}{\omega^2/c^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ (*) \quad B_x &= \frac{i}{\omega^2/c^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial B_z}{\partial x} - \omega \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) & B_y &= \frac{i}{\omega^2/c^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial B_z}{\partial y} + \omega \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Das bedeutet: Wenn man die longitudinalen Komponenten bestimmt hat, erhält man durch Differenzieren nach x und y auch die übrigen Komponenten. Dies lässt sich auch für E - und B -Felder separat machen. Einsetzen der x - und y -Komponenten in

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0 \qquad \vec{\nabla} \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$$

ergibt **zwei entkoppelte Gleichungen:**

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_z^2 \right\} E_z = 0 \qquad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_z^2 \right\} B_z = 0$$

Eine dieser z -Komponenten verschwindet:

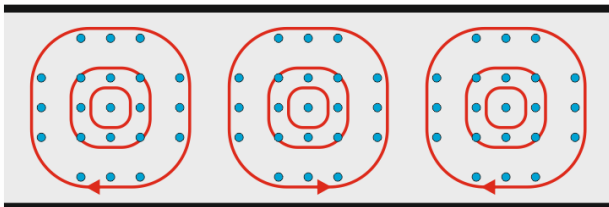
$E_z = 0$ TE-Wellen (transversal-elektrisch)

$B_z = 0$ TM-Wellen (transversal-magnetisch)

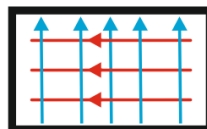
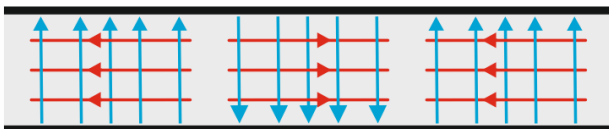
$E_z = B_z = 0$ TEM-Wellen treten in Hohlleitern nicht auf, weil

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + 0 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

nicht mit einem konstanten Potenzial erfüllt werden können. Dies ist anders, wenn sich im Hohlraum weitere Strukturen befinden, z.B. Koaxialkabel.



E B



Beispiel: TE₁₀-Welle

Rechnung s. nächste Seite

Beispiel: TE-Wellen im rechteckigen Hohlleiter mit $\Delta x = a$ und $\Delta y = b$

Nur longitudinales B -Feld, Separationsansatz

$$B_z(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad \rightarrow \quad Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left\{ \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_z^2 \right\} XY = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_z^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad -k_x^2 - k_y^2 + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_z^2 = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2$$

Allgemeine Lösung, z.B. für $X(x)$: $X(x) = A \cdot \sin(k_x x) + B \cdot \cos(k_x x)$

Weil aber $E_z = 0$ ist und B_x bei $x = 0$ und a null sein muss, muss auch dX/dx null sein, siehe Gleichung (*). Dasselbe Argument gilt für $Y(y)$, sodass

$$B_z = B_0 \cdot \cos(k_x x) \cdot \cos(k_y y) \quad k_x = \frac{n\pi}{a} \quad k_y = \frac{m\pi}{b}$$

Die longitudinale Komponente des elektrischen Felds E_z ist null, da wir eine TE-Welle betrachtet haben.

Die Wellenzahl der Mode als Funktion der Frequenz ist $k = \sqrt{\left(\omega / c \right)^2 - \left(\pi n / a \right)^2 - \left(\pi m / b \right)^2}$

woraus man die Grenzfrequenz $\omega_{nm} = c\pi \sqrt{\left(n / a \right)^2 + \left(m / b \right)^2}$

und die Phasengeschwindigkeit $v_{nm} = \omega / k = c / \sqrt{1 - \omega_{nm}^2 / \omega^2}$ ableiten kann.

Die transversalen Feldkomponenten ergeben sich aus den Ableitungen des longitudinalen Felds nach den Koordinaten x und y , z.B. hier für eine TE_{10} -Welle ($n = 1, m = 0$)

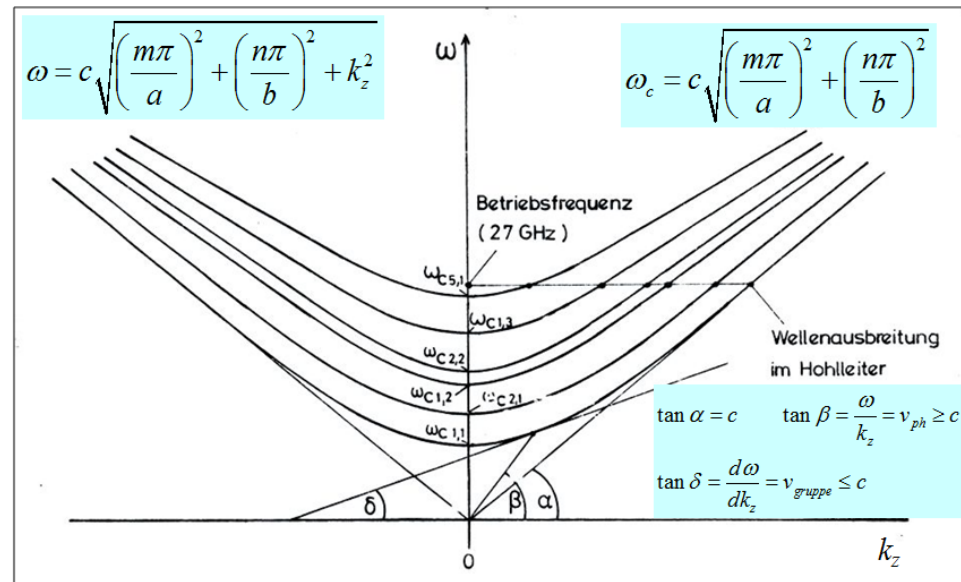
$$E_x = \frac{i}{\omega^2 / c^2 - k_z^2} \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} = -E_0 \cdot \cos\left(\frac{1 \cdot \pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(\frac{0 \cdot \pi}{b} y\right) = 0$$

$$E_y = \frac{-i}{\omega^2 / c^2 - k_z^2} \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} = E_0 \cdot \sin\left(\frac{1 \cdot \pi}{a} x\right) \cdot \cos\left(\frac{0 \cdot \pi}{b} y\right) = E_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

$$B_x = \frac{i}{\omega^2 / c^2 - k_z^2} k_z \frac{\partial B_z}{\partial x} = -B_0 \cdot \sin\left(\frac{1 \cdot \pi}{a} x\right) \cdot \cos\left(\frac{0 \cdot \pi}{b} y\right) = -B_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

$$B_y = \frac{i}{\omega^2 / c^2 - k_z^2} k_z \frac{\partial B_z}{\partial y} = -B_0 \cdot \cos\left(\frac{1 \cdot \pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(\frac{0 \cdot \pi}{b} y\right) = 0$$

Jede Kurve im Dispersionsdiagramm $\omega(k_z)$ beschreibt eine Mode mit einer kleinsten Frequenz bei $k_z = 0$. Mit einer gegebenen Senderfrequenz kann man je nach Abmessungen (a, b) des Wellenleiters verschiedene Moden realisieren. Welche dabei bevorzugt angeregt wird, hängt von der Einkopplung in den Wellenleiter ab. In der Regel wird der Wellenleiter so dimensioniert, dass man bei gegebener Frequenz nur eine Mode erreicht.



Nochmal: Modell für eine elektromagnetische Welle in Materie (hier: nichtleitende Materie)

Elektronen der Atome in Materie verhalten sich wie gedämpfte Oszillatoren und Masse m (für kleine Auslenkungen gut erfüllt) und werden durch eine einlaufende elektromagnetische Welle zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Die Auslenkung der Elektronen ergibt zusammen mit der Elementarladung ein Dipolmoment. Über den Ausdruck für die Polarisation wurde für die Dielektrizitätszahl gefunden:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{e^2 \cdot N / V}{\varepsilon_0 \cdot m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \cdot \gamma}$$

Für die meisten Materialien ist die relative Permeabilität nahe an 1, sodass für den Brechungsindex gilt

$$n \equiv \frac{c}{v_{\text{Ph}}} = c \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \quad \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 1/c \quad \mu_r \approx 1$$

Da die Dielektrizitätszahl komplex ist, hat auch der Brechungsindex einen Real- und Imaginärteil und ebenso die Wellenzahl $k = \omega / v_{\text{Ph}}$. Der Realteil beschreibt eine Änderung der Phasengeschwindigkeit, der Imaginärteil eine exponentielle Abnahme der Welle. Erweitert mit $\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \cdot \gamma$

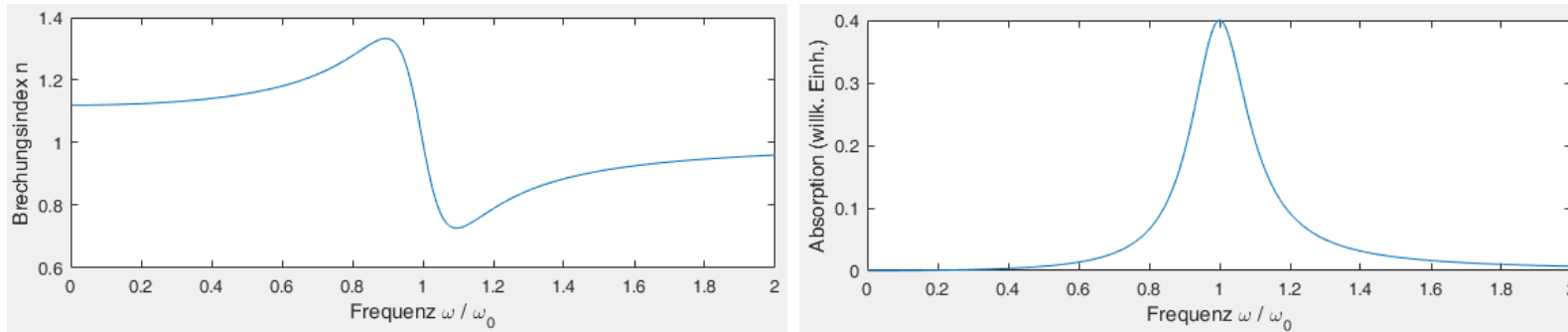
$$\varepsilon_r = 1 + \frac{e^2 \cdot N / V}{\varepsilon_0 \cdot m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \cdot \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad \sqrt{\varepsilon_r} \equiv \sqrt{1 + X} \approx 1 + \frac{X}{2} \quad \text{Wurzel entwickelt}$$

Real- und Imaginärteil separat betrachtet:

$$\text{Reeller Brechungsindex:} \quad \text{Re}(n) \approx \text{Re} \sqrt{\varepsilon_r} \approx 1 + \frac{e^2 \cdot N / V}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \gamma^2}$$

$$\text{Absorptionskoeffizient:} \quad \alpha = 2k_i \approx \frac{\omega}{c} \text{Im} \sqrt{\varepsilon_r} = \frac{e^2 \cdot N / V}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot m \cdot c} \cdot \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \gamma^2}$$

Bei der Resonanzfrequenz ω_0 hat die Absorption ein Maximum, das jeweilige Material ist nahezu undurchsichtig, und $n-1$ wechselt das Vorzeichen. Viele durchsichtige Materialien, z.B. Gläser, haben eine Resonanz im Ultraviolett(UV)-Bereich. Dadurch steigt der Brechungsindex im sichtbaren und nahen UV-Bereich mit zunehmender Frequenz an. Dies wird als "normale Dispersion" bezeichnet. Das gegenteilige, weniger typische Verhalten nennt man "anomale Dispersion".



Die Änderung des Brechungsindex an der Grenzfläche ist für die Brechung des Lichts verantwortlich. Zum Beispiel besagt das Snelliussche Brechungsgesetz (siehe Optik im nächsten Semester):

$$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$$

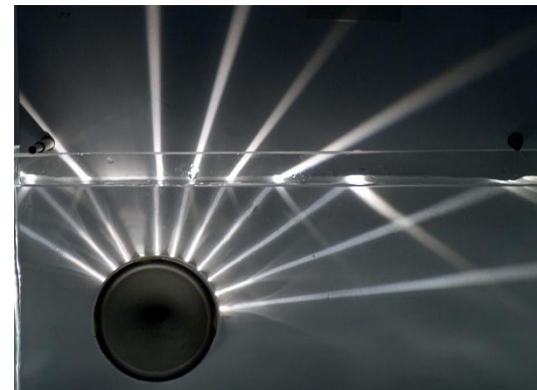
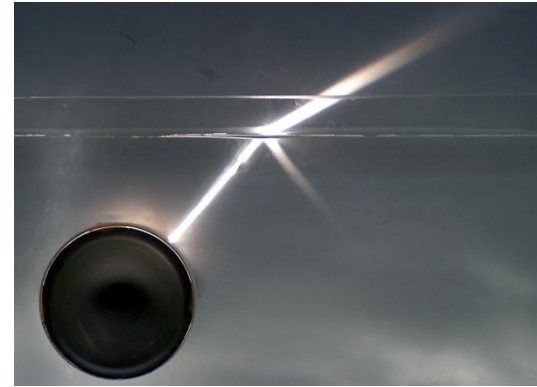
Hier ist $n_{1,2}$ der Brechungsindex beiderseits einer Grenzfläche (z.B. Oberfläche einer Linse, Wasseroberfläche etc.) und $\alpha_{1,2}$ ist als der Winkel eines Lichtstrahl gegen die Senkrechte auf der Fläche definiert. Hieraus ergeben sich z.B. die (de)fokussierende Eigenschaft einer Linse, die Totalreflexion des Lichts an der Wasseroberfläche aus der Sicht eines Tauchers etc. Während normale Linsen aus Glas mit $n > 1$ geformt sind, gibt es für Röntgenstrahlung bei n knapp unter 1 ebenso geformte Hohlräume in Materialien wie z.B. Beryllium, die ebenso fokussieren.

Rein rechnerisch kann man sich auch Materialien mit $n = -\sqrt{\epsilon_r \mu}$ vorstellen, was zu verrückten optischen Phänomenen führt, z.B. dass man ein Objekt unsichtbar machen kann. Während Harry Potter bereits einen Mantel aus einem solchen "Meta-Material" für sichtbare Wellenlängen besitzt, sind solche Materialien in der *Muggle*-Welt hauptsächlich für den fernen Infrarot-Bereich durch die Anordnung einer Vielzahl kleiner Strukturen, die wie Schwingkreise wirken, realisiert worden.

Experimente

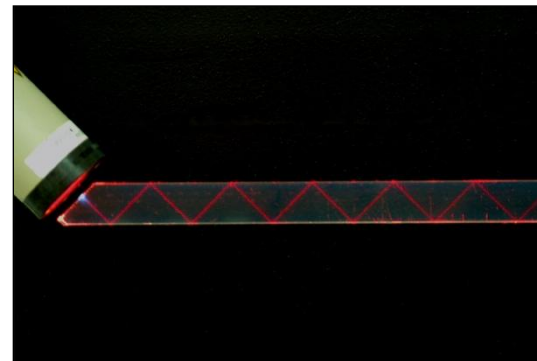
Brechung und Reflexion eines Lichtstrahls

Nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz wird ein Lichtstrahl, der von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium tritt (hier von Wasser nach Luft) so gebrochen, dass der Winkel zum Lot auf die Grenzfläche größer wird. Zudem findet an der Grenzfläche Reflexion statt (Einfallswinkel = Ausfallswinkel). Bei einem bestimmten Einfallswinkel beträgt der Winkel des gebrochenen Anteils 90° , sodass darüber hinaus nur noch Reflexion stattfindet (sog. Totalreflexion).



Totalreflexion in einem Acrylglasstab

Totalreflexion eines Laserstrahls wird am Beispiel eines Stabes aus Acrylglas (Brechungsindex $\approx 1,5$) demonstriert. Der Effekt findet in ähnlicher Form in Lichtwellenleitern statt und ermöglicht es, Signale mit Licht verlustarm über große Strecken (Kilometer) zu übertragen – unter $0,2 \text{ dB/km}$, was etwa $4,7\%$ Verlust pro Kilometer bedeutet.



Nichtlineare Optik, zwei Beispiele: Frequenzverdopplung und Kerr-Effekt

In der traditionellen Optik genügt es i.d.R., einen linearen Zusammenhang zwischen Polarisation und elektrischem Feld anzunehmen, z.B. in isotropen Medien:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

(in anisotropen Medien wird aus der Suszeptibilität ein Tensor und die Polarisation ergibt sich durch Summieren über die drei Raumrichtungen). Seit dem Aufkommen von Strahlungsquellen mit sehr hohen elektrischen Feld (GV/m bis TV/m) wie gepulsten Hochleistungslasern oder Freie-Elektronen-Lasern ist es nicht mehr ungewöhnlich, dass auch Terme höherer Ordnung eine Rolle spielen:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \dots \right)$$

Das elektrische Feld sei $E_x \cdot \cos(\omega t)$. Dann enthält der zweite Term einen Ausdruck

$$\cos^2(\omega t) = 1/2 \{1 + \cos(2\omega t)\}$$

mit der doppelten Frequenz. Es ist gängige Praxis, Laserpulse durch ein Material mit geeignetem $\chi^{(2)}$ zu schicken (z.B. BBO, Beta-Bariumborat), um die Frequenz des Lichts zu verdoppeln (SHG, *second-harmonic generation*), z.B. grüner Laserpointer mit diodengepumptem Festkörperlaser bei 1064 nm Wellenlänge und Frequenzverdopplung.

Der dritte Term der Reihenentwicklung ist proportional zu $S \cdot \vec{E}$ mit der Energiestromdichte $S \sim \vec{E}^2$. Damit werden Polarisation und Brechungsindex proportional zur Intensität von Laserstrahlung, oft beschrieben durch das sog. B-Integral

$$B = \frac{2\pi}{\lambda} \int n_2 \cdot I(z) \cdot dz$$

Hier ist n^2 der nichtlineare Anteil des Brechungsindex in m^2/W , $I(z)$ die Intensität in W/m^2 und λ die Wellenlänge, und B gibt die Phasenverschiebung des Lichts durch den nichtlinearen Effekt (auch elektrooptischer Kerr-Effekt genannt) an. Zum Beispiel ist beim Durchgang eines Laserpulses mit gaußförmigen Profil die Verschiebung stärker als am Rand, was eine intensitätsabhängige Fokussierung bewirkt (Kerr-Linse).