Mikrowellen- und Lichtwellenleiter

Wellenleiter haben große Bedeutung in der Funk-, Fernseh- und Radartechnik (Mikrowellen) und Kommunikationstechnik (Lichtwellenleiter, Glasfaserkabel). Sie erlauben, elektromagnetische Wellen räumlich zu begrenzen und gezielt und mit wenig Verlusten von einem Ort zum anderen zu führen.

Frequenzen und Wellenlängen:

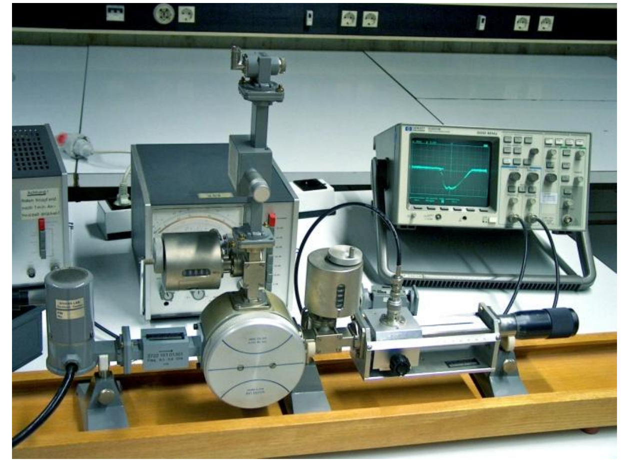
Langwelle	30 kHz ... 300 kHz	10 km ... 1 km
Mittelwelle	0,3 MHz ... 3 MHz	1000 m ... 100 m
Kurzwelle	3 MHz ... 30 MHz	100 m ... 10 m
UKW/VHF	30 MHz ... 300 MHz	10 m ... 1 m
Dezimeterwellen/UHF	0,3 GHz ... 3 GHz	100 cm ... 10 cm
"Mikrowellen"	0,3 GHz ... 300 GHz	100 cm ... 0,1 cm
"Terahertzstrahlung"	0,3 THz ... 30 THz	1 mm ... 0,01 mm
"Infrarotstrahlung"	0,3 THz ... 400 THz	1000 μm ... 0,78 μm

Einige Frequenzbänder (nicht einheitlich definiert):

L-Band z.B. 1,3 GHz (z.B. European XFEL in Hamburg)
S-Band z.B. 2,9 GHz (z.B. SLAC-Linearbeschleuniger in Menl Park/USA)
C-Band z.B. 5,7 GHz (z.B. SACLA in Harima/Japan, SwissFEL in Villigen/Schweiz)
X-Band z.B. 12 GHz (z.B. CLIC-Projekt bei CERN in Genf/Schweiz)

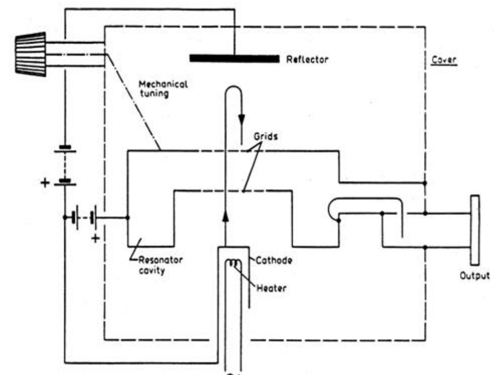
Einige Lasersysteme mit Glasfasern als Lasermedium:

Er-Laser 1,55 μm
Nd-Laser 1,06 μm
Yb-Laser 1,03 μm



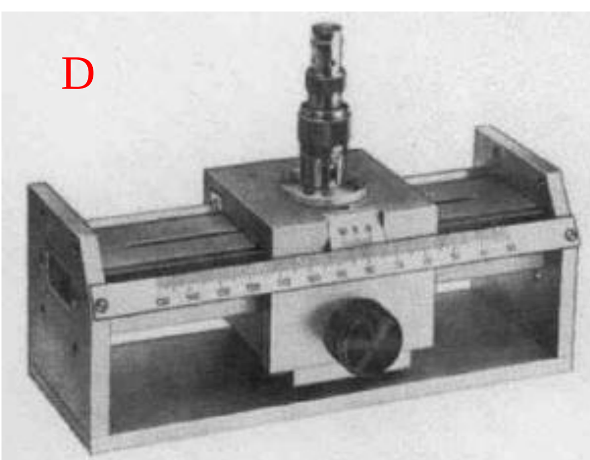
Experiment: Hohlleiter

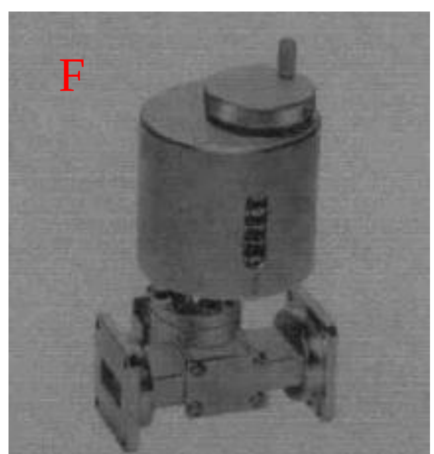
Ein Reflexklystron erzeugt eine elektromagnetische Welle mit einer Frequenz von ca. 9 GHz. In einem rechteckigen Hohlleiter passiert die Welle einen Isolator (stoppt den Rücklauf reflektierter Leistung), einen Frequenzmesser, einen Folien-abschwächer und einen entlang des Hohlleiters verschiebbaren Detektor und wird schließlich an einem Kurzschluss reflektiert, sodass eine stehende Welle entsteht.
Der Frequenzmesser (F) besteht aus einen Resonator, dessen Geometrie mit einer Kurbel geändert werden kann, und der dem Signal am Detektor etwas Energie entzieht, wenn er mit der Welle in Resonanz ist (die Frequenz wird an einem Zählwerk abgelesen). Mit dem Detektor wird die Position der Minima und Maxima der stehenden Welle gefunden. Ergebnis:

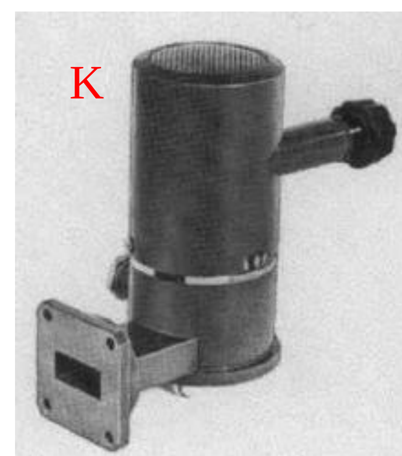


Gemessene Frequenz $f = 9{,}015$ GHz, Wellenlänge $\lambda = 42{,}0$ mm.

Phasengeschwindigkeit: $v_{\mathrm{Ph}} = \lambda \cdot f = 4{,}32 \cdot 10^8 = 1{,}44 \cdot c$







Laufende Welle zwischen zwei planparallelen leitenden Platten mit Abstand $\Delta x = a$

Ausbreitung in x-z-Richtung, elektrisches Feld in y-Richtung, Reflexion mit Phasensprung bei $x = 0$, a

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\sin\left(\omega t - k_x x - k_z z\right) - \sin\left(\omega t + k_x x - k_z z\right)\right]$$

mit $\sin(x-y) - \sin(x+y) = -2\cdot\cos(x)\cdot\sin(y)$

$$= -2 \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \sin\left(k_x x\right)\cdot\cos\left(\omega t - k_z z\right)$$

Knotenebenen für $x = \pi/ k_x = a/n$ (n = 1, 2, 3 ...) wie bei stehenden Wellen, aber laufende Welle in z-Richtung, deren Amplitude von x abhängt.

Phasengeschwindigkeit: $\cos\left(\omega t - k_z z\right) \quad \rightarrow \quad v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{k_z} k = \frac{c}{k_z}\sqrt{k_x^2 + k_z^2} = c\sqrt{1 + \frac{k_x^2}{k_z^2}} \geq c$

kann größer als c sein und hängt von k_x und damit auch von der Modennummer n ab. Die Phase trägt jedoch keine Information, also kein Widerspruch z.B. zur Relativitätstheorie.

$$v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2 c^2}{a^2\omega^2}}}$$

Das Argument der Wurzel kann < 0 werden. Abschneide(cutoff-)frequenz, unterhalb der die Welle nicht propagiert, sondern gedämpft wird:

$$\omega_c = \frac{nc\pi}{a} \quad \leftrightarrow \quad \lambda_c = \frac{2a}{n}$$

Gruppengeschwindigkeit:

$$v_{\mathrm{G}} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{d\omega}{dk}\frac{dk}{dk_z} = c\frac{k_z}{k} = \frac{c^2}{v_{\mathrm{Ph}}} \leq c$$

$$\omega = c\cdot k \qquad k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} \qquad k_z = \frac{k\cdot c}{v_{\mathrm{Ph}}}$$

Allgemein kann das *E*-Feld auch in *x*- und *z*-Richtung Komponenten besitzen.
Unterscheidung:

$$\vec{E}_0 = \left(E_x, E_y, 0\right) \qquad B_z \neq 0$$ **TE-Wellen** (transversal-elektrisch)

$$\vec{B}_0 = \left(B_x, B_y, 0\right) \qquad E_z \neq 0$$ **TM-Wellen** (transversal-magnetisch)

Anmerkung: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Eingangs wurde eine Welle definiert als eine Funktion der Form $f(z,t) = f(z - v \cdot t) = f(u)$

die periodisch sein kann (z.B. Sinus oder Kosinus), aber nicht periodisch sein muss. Jedes Radiosignal ist eine nicht-periodische Welle (eine unendlich lange Sinuswelle enthält keine Information) und besteht i.d.R. aus einer sinusförmigen Trägerwelle, weil der Sender bei einer bestimmten Frequenz arbeitet, und einer Einhüllenden, deren Modulation Information trägt. Die Trägerwelle bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{\mathrm{Ph}} = \lambda \cdot f = \frac{2\pi \cdot f}{2\pi / \lambda} = \frac{\omega}{k}$$

Die Einhüllende bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit, die nicht mit der Phasengeschwindigkeit übereinstimmen muss. Um eine Einhüllende zu beschreiben, benötigt man mindestens zwei verschiedene Frequenzen mit der jeweiligen Wellenzahl $\omega \qquad \omega + \Delta\omega \qquad k \qquad k + \Delta k.$

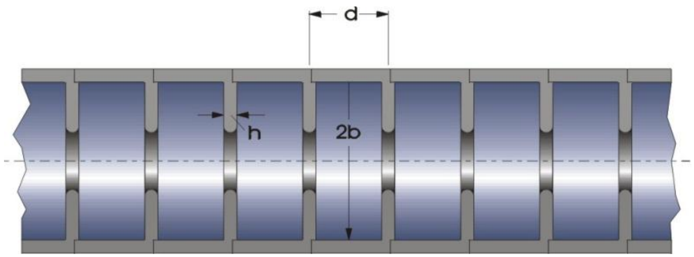
Ein Maximum der Einhüllenden erhält man für eine feste Phase zwischen beiden Teilwellen

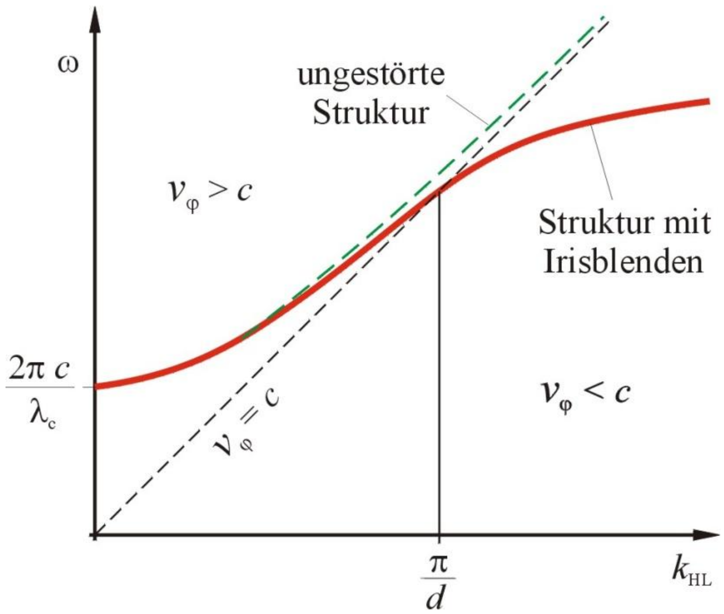
$$\omega \cdot t - k \cdot z = \left(\omega + \Delta\omega\right) \cdot t - \left(k + \Delta k\right) \cdot z \quad \rightarrow \quad 0 = \Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot z$$

$$v_{\mathrm{G}} = \frac{z}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad \rightarrow \quad v_{\mathrm{G}} = \frac{d\omega}{dk}$$

Die Funktion $\omega(k)$ nennt man Dispersionsrelation. Die Gruppengeschwindigkeit ist durch die Steigung der Tangente an einen gegebenen Punkt (k,ω) gegeben, die Phasengeschwindigkeit durch die Steigung der Ursprungsgeraden durch diesen Punkt.

In einer Dispersionsretaion ω(k) entspricht die Phasengeschwindigkeit der Steigung einer Ursprungsgeraden durch einen Punkt der Kurve und der Gruppengeschwindigkeit entspricht die Steigung der Tangente durch den Punkt.

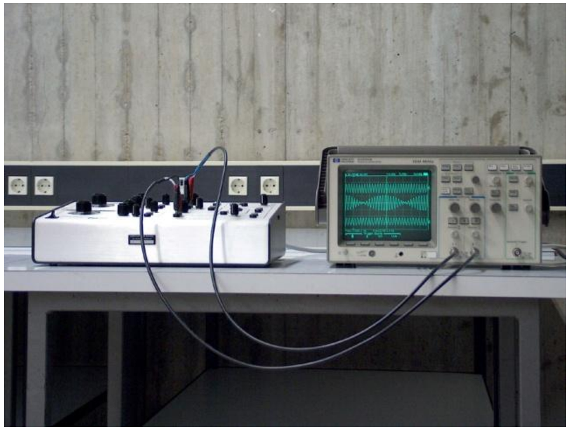




Elektronenbeschleuniger: Die Phasengeschwindigkeit wird durch Irisblenden herabgesetzt, so dass sie der Fluggeschwindigkeit der Elektronen entspricht.

Weltweit größter Linearbeschleuniger am SLAC (Stanford Linear Accelerator) in Kalifornien: der "two-mile linac" ist ca. 3 km lang und enthält etwa 80000 Iris-Strukturen aus Kupfer. Ursprünglich beschleunigte er Elektronen auf 50 GeV für Teilchen-physikeperimente an ortsfesten Proben, 1989-1998 beschleunigte er Elektronen und Protonen für ein Kollisionsexperiment (SLD), später diente er als Injektor für eine B-Mesonen-Fabrik (Elektronen-Positronen-Speicherring) und seit 2009 wird das letzte Drittel der Maschine für einen Freie-Elektronen-Laser (LCLS - Linear Coherent Light Source) bei 14 GeV genutzt.

Experiment zur Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

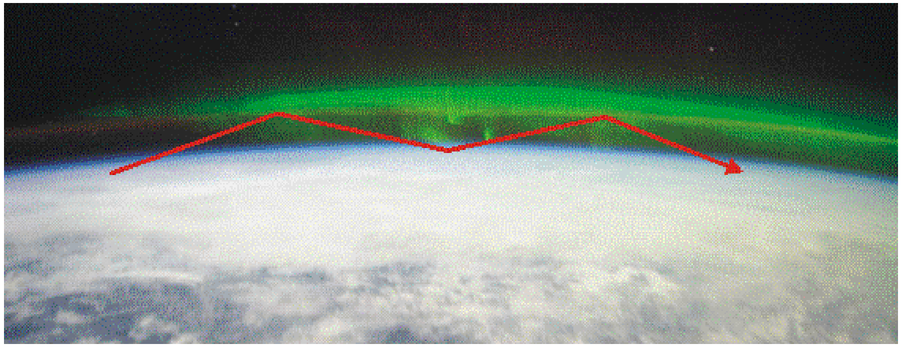


Ein Funktionsgenerator erzeugt zwei Sinuswellen mit leicht unterschiedlicher Frequenz. Ein digitales Oszilloskop stellt diese Wellen dar das stehendes Bild dar und bildet die Summe beider Wellen. Das Summensignal besteht in einer Schwebung, die sich aber gegenüber den Einzelsignalen bewegt – Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind in diesem Fall nicht gleich.

Die Erdatmosphäre als Wellenleiter

Die ultraviolette Strahlung der Sonne ionisiert die Erdatmosphäre im Höhen um 100 bis 1000 km. Das so entstehende Plasma hat eine charakteristische Plasmafrequenz, mit der positive und negative Ladungen gegeneinander schwingen können. Diese Frequenz hängt von der Ionendichte ab.

An der Untergrenze der sogenannten Ionosphäre (Heavyside-Schicht in ca. 100 km Höhe) werden Radiowellen im Kurzwellenbereich reflektiert, sodass sie weltweit empfangen werden können. Wellen kürzerer Wellenlänge (UKW-Radiowellen, Mobilfunk etc.) werden nicht reflektiert, ihre Ausbreitung wird als "quasi-optisch" bezeichnet (d.h. geradlinig, wenngleich sie Gebäude und andere Hindernisse z.T. durchdringen).



Strahlungsdruck

Eine elektromagnetische Welle besitzt nicht nur eine Energiestromdichte S, sondern kann auch Impuls übertragen. Hier ist die Vorstellung von masselosen Lichtteilchen (sog. Photonen) hilfreich, die eine Energie und einen Impuls besitzen:
(vgl. später Quantenmechanik)

$$E = h \cdot f \qquad p = \frac{h}{\lambda} \qquad \rightarrow \qquad \frac{E}{p} = \lambda \cdot f = c$$

$$E = m_0 \cdot \gamma \cdot c^2 \qquad p = m_0 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot c \qquad \xrightarrow[\gamma\to\infty]{\beta\to 1} \qquad \frac{E}{p} \rightarrow c$$

Das Verhältnis E/p ist dasselbe wir für Teilchen mit Masse im Grenzfall $\gamma \rightarrow \infty$.

Nicht-quantenmechanischer Ausdruck: p_{St} (Impuls/Volumen) = S (Energie/Zeit/Fläche) / c^2

Polarisation

Bisher wurden nur linear polarisierte Wellen betrachtet:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - kz) = \left[E_{0x} \cdot \cos(\omega t - kz), E_{0y} \cdot \cos(\omega t - kz) \right]$$

Beide Komponenten schwingen in Phase. Die Polarisationsrichtung kann durch Änderung der Amplituden gedreht werden.

Eine Welle ist zirkular polarisiert, wenn die beiden Komponenten um $\pi/2$ außer Phase sind:

$$\vec{E} = \left[E_{0x} \cdot \cos(\omega t - kz), E_{0y} \cdot \cos(\omega t - kz - \pi/2) \right]$$

Der E-Vektor beschreibt eine Kreisspirale entlang z und behält seine Länge bei. Ist die Phasendifferenz weder 0 (oder π) noch $\pi/2$ (oder $3\pi/2$), spricht man von elliptischer Polarisation. Der E-Vektor beschreibt eine Spirale mit elliptischen Querschnitt.

Die Spirale kann einer Rechts- oder Linksschraube entsprechen (wobei man – konventionsgemäß – der Ausbreitungsrichtung entgegenblickt):
Rechts zirkulare Polarisation (σ^- mit Drehimpulsvektor und Wellenzahlvektor antiparallel),
Links zirkulare Polarisation (σ^+ mit Drehimpulsvektor und Wellenzahlvektor parallel).

Verzögerungsplatten, in denen die Lichtgeschwindigkeit nicht isotrop ist, ändern den Polarisationszustand, z.B.
$\lambda/2$-Plättchen verzögern um eine halbe Wellenlänge und drehen die Richtung der linearen Polarisation,
$\lambda/2$-Plättchen verzögern um eine viertel Wellenlänge und verwanden lineare in zirkulare Polarisation.

Elektromagnetische Wellen in Materie

Elektromagnetische Wellen propagieren in Materie i.d.R. langsamer als c. Der Unterschied wird durch den Brechungsindex n ausgedrückt, der eine Funktion von Wellenlänge bzw. Frequenz des Lichts ist. Typischerweise steigt bei sichtbarem der Brechungsindex mit der Frequenz ("normale Dispersion"). Außerdem werden elektromagnetische Wellen in Materie absorbiert. Viele Materialien sind "undurchsichtig", was aber auch von der Wellenlänge bzw. Frequenz abhängt (vgl. z.B. sichtbares Licht und Röntgenstrahlung).

Wellengleichung im Vakuum und in Materie

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}} = \dfrac{c}{n}$ n: Brechungsindex

Die relative Permeabilität ist für viele Materialien nahezu 1, so dass $n = \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$

Modell

Elektronen der Atome in Materie verhalten sich wie gedämpfte Oszillatoren mit Federkonstante k_F und Masse m (für kleine Auslenkungen gut erfüllt) und werden durch eine einlaufende elektromagnetische Welle zu erzwungenen Schwingungen angeregt.

$$a = \frac{F}{m} = \ddot{x} + \gamma \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{e}{m} \cdot E_0 \cdot \exp(-\mathrm{i}\omega \cdot t)$$

$$x(t) = x_0 \cdot \exp(-\mathrm{i}\omega \cdot t)$$

$$-\omega^2 \cdot x_0 - \mathrm{i}\omega \cdot x_0 \cdot \gamma + \omega_0^2 \cdot x_0 = \frac{e}{m} \cdot E_0$$

$$x_0 = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega \cdot \gamma} \cdot E_0$$

Polarisation = Summe atomarer Dipolmomente / Volumen ($\neq$ Polarisation einer Welle)

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E} \qquad \varepsilon_r = 1 + \chi$$

(Im Allgemeinen schwingen die Elektronen mit unterschiedlicher Eigenfrequenz und Dämpfung)

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{1}{V \cdot \varepsilon_0 \cdot E} \sum_i e \cdot x_i = 1 + \frac{e^2 \cdot N/V}{\varepsilon_0 \cdot m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega \cdot \gamma}$$

Die relative Dielektrizitätskonstante kann also komplex sein. Daraus kann man die Wellenzahl und den Brechungsindex berechnen:

$$k = k_r + i \cdot k_i \approx \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0}$$

Betrachte ebene Wellen: Wenn k eine komplexe Wellenzahl ist, so beschreibt der Realteil eine Welle, die mit der Geschwindigkeit $v = \omega/k_r$ propagiert, während der Imaginärteil eine exponentiell gedämpfte Welle beschreibt:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cdot \exp(i\{k \cdot z - \omega \cdot t\}) = E_0 \cdot \exp(-k_i \cdot z) \cdot \exp(i\{k_r \cdot z - \omega \cdot t\})$$