Abstrahlung einer Dipolantenne (nochmal anders, vgl. Gerthsen: Physik, Springer)

Energiestromdichte (vgl. Poynting-Vektor)

$$S = A \cdot \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \qquad [S] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{m}^2} \qquad [A] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$$

Dimensionsbetrachtung für den Faktor *A*

Im Nenner steht in SI-Einheiten sicher $1/\varepsilon_0$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] = 1\ \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}} = 1\ \frac{\mathrm{J} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{C}^2}$$

Multiplikation mit dem Quadrat des Dipolmoments p beseitigt C^2

$$\left[\frac{p^2}{\varepsilon_0}\right] = 1\ \frac{\mathrm{J} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{C}^2} \mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{m}^2 = 1\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{m}^3$$

Division durch Lichtgeschwindigkeit^3 beseitigt m^3

$$\left[\frac{p^2}{\varepsilon_0 \cdot c^3}\right] = 1\ \frac{\mathrm{J} \cdot \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^3} = \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^3$$

Die Frequenz spielt sicher eine Rolle, ω^4 ergibt die richtige Einheit

$$\left[\frac{p^2 \cdot \omega^4}{\varepsilon_0 \cdot c^3}\right] = \frac{\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^3}{\mathrm{s}^4} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$$

Die Energiestromdichte ist demnach $S \sim \dfrac{p^2 \cdot \omega^4}{\varepsilon_0 \cdot c^3}$ mit einem Vorfaktor, den eine einfache Dimensionsbetrachtung nicht liefern kann.

Wichtig ist die Abhängigkeit $S \sim \omega^4$, die u.a. erklärt, warum der Himmel auf der Erde blau erscheint.

Sonnenlicht wird an unregelmäßig verteilten Dipolantennen (Moleküle) in der Atmosphäre gestreut, d.h. das elektrische Feld des Lichts erzeugt eine Anregung, die zu einer $\sin^2$-förmigen Abstrahlung mit starker Betonung hoher Frequenzen (blau) führt. Dies macht sowohl die blaue Farbe des Himmels plausibel, als auch die rote Farbe bei Sonnenauf/untergang, die Polarisation des Himmelslichts und die Tatsache, dass der Himmel senkrecht zur Sonnenrichtung am intensivsten blau erscheint.

Abschlusswiderstand

Der Wellenwiderstand gilt gleichermaßen für die hin- und rücklaufende Welle: $Z = \frac{U_0}{I_0} = -\frac{U_r}{I_r}$

Abschluss mit Widerstand R: $R = \frac{U_0 + U_r}{I_0 + I_r} = \frac{U_0 + U_r}{U_0 / Z - U_r / Z}$

$$\frac{R}{Z} = \frac{1+\rho}{1-\rho} \qquad (1-\rho)\frac{R}{Z} = 1+\rho \qquad \rho \equiv \frac{U_r}{U_0} \quad \text{Reflexionskoeffizient}$$

$$\rho = \frac{R/Z - 1}{R/Z + 1} = \frac{R-Z}{R+Z}$$

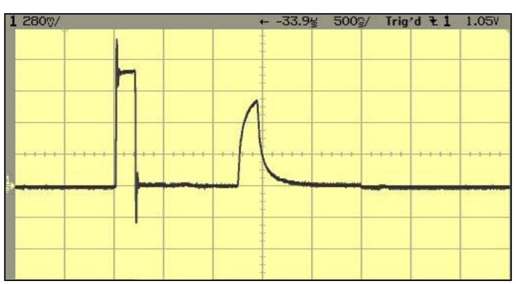
Betrachte 3 Fälle:

$R \to \infty$	$\rho = 1$	offenes Ende: vollständige Reflexion
$R = Z$	$\rho = 0$	optimaler Abschluss: keine Reflexion
$R \to 0$	$\rho = -1$	Kurzschluss: vollständige Reflexion mit Wechsel der Polarität

Beispiel: Spannungspuls über 50-Ohm-Kabel an Oszilloskop, aber Abschluss mit 1 MΩ (nahezu unendlich), einlaufender und auslaufender Puls addieren sich: nahezu doppelte Pulshöhe.

Messung an einem Koaxialkabel Laufzeit 1,23 µs, Kabellänge 200 m → Geschwindigkeit $1{,}63 \cdot 10^8$ m/s

offenes Ende



Kurzschluss

mit 50-Ω-Abschluss

Stehende elektromagnetische Wellen

Reflexion einer Welle in *z*-Richtung an der leitenden *x*-*y*-Ebene bei *z* = 0

$$\vec{E}_1 = \left(E_{0x}\cdot\cos(\omega t - kz), 0, 0\right)$$

$$\vec{E}(0,t) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E}_1 = -\vec{E}_2$$ Phasensprung an der Ebene

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_{01}\cdot\cos(\omega t - kz) + \vec{E}_{02}\cdot\cos(\omega t + kz)$$

mit $E_{02} = -E_{01}$ und
$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\cdot\sin(x)\cdot\sin(y)$

$$\vec{E}(z,t) = 2\vec{E}_{01}\cdot\sin(kz)\cdot\sin(\omega t)$$ stehende Welle

Magnetfeld

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\vec{B}(z,t) = 2\left(0, \underset{c}{E_{0x}\cdot k/\omega}, 0\right)\cdot\cos(kz)\cdot\cos(\omega t)$$

kein Phasensprung und Maxima gegen *E*-Feld um $\lambda/4$ Wellenlänge versetzt, während bei der freien Welle *E*- und *B*-Feld in Phase sind.

Quader aus leitenden Wänden bei *x* = 0 und *a* *y* = 0 und *b* *z* = 0 und *c*

Transversale Feldkomponenten an den Wänden sind null z.B. $E_x = 0 \qquad y = 0, b \qquad z = 0, c$ usw.

Wellenvektor mit der Bedingung $\vec{k} = \left(k_x, k_y, k_z\right) \qquad k_x = 2\pi/\lambda_x = n\cdot\pi/a$ (*n*, *m*, *q* ganze Zahlen)

$$\left|\vec{k}\right| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}} \qquad \omega = c\cdot k$$

Damit: $\vec{E}_{n,m,q} = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})\cdot\cos(\omega t) \qquad E_{0x} = A\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\cdot\sin\left(\frac{q\pi}{c}x\right)$ usw.

Würfel aus leitenden Wänden *a* = *b* = *c*

Wie viele Eigenschwingungen gibt es im Resonator bis zu einer bestimmten Maximalfrequenz $\omega_G = c \cdot k_G$? Betrachtung eines Würfels aus leitenden Wänden zur Vereinfachung.

$$\omega = c \cdot k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{c \cdot \pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2 + q^2}$$

In einem Koordinatensystem (k_x, k_y, k_z) bilden die Punkte (n, m, q) ein Gitter mit Abstand π/a. Es gibt doppelt so viele Eigenschwingungen (Moden) wie Gitterpunkte, weil zu jedem Gitterpunkt zwei unabhängige Polarisationsrichtungen gehören. Zahl der Gitterpunkte (näherungsweise)

$$N_G = \frac{V_k}{V_E}$$

Volumen eines Oktanten im *k*-Raum

Volumen der Einheitszelle $(\pi/a)^3$

Zahl der Moden

$$V_k = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot k_G^3 = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \qquad \omega_G = 2\pi \cdot f_G \qquad \rightarrow \qquad N = 2N_G = \frac{\pi}{3} \frac{8\pi^3 f_G^3}{c^3} \frac{a^3}{\pi^3}$$

Modendichte

$$n = \frac{N}{a^3} = \frac{8\pi}{3c^3} f_G^3$$

Spektrale Modendichte

$$\frac{dn}{df} = \frac{8\pi}{c^3} f_G^2$$

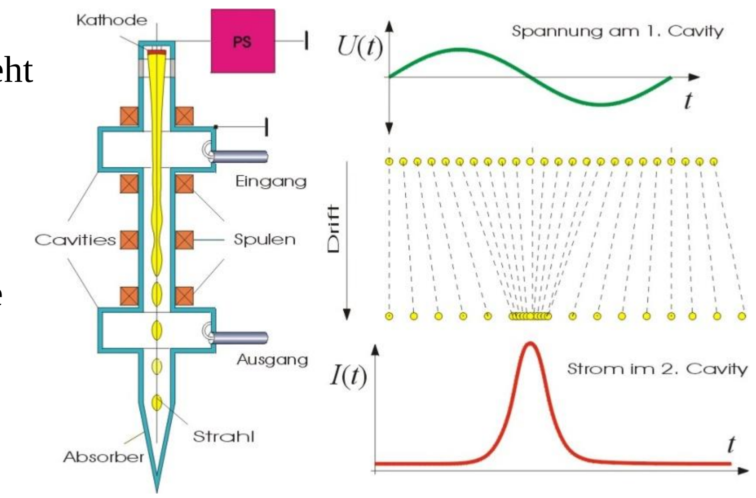
Zylinderförmige Resonatoren

führen zu Ausdrücken mit Besselfunktionen statt Sinus/Kosinus. Einfachster Fall TM_{010}-Mode (transversal-magnetisch, longitudinales *E*-Feld mit 0 longitudinalen, 1 radialen und 0 azimutalen Knoten.

Siehe Übungsaufgabe 4 in Übungsblatt 9: Übergang von statischen Fall des Plattenkondensators zur Besselfunktion J_0 für das oszillierende *E*-Feld. Die Mantelfläche des Resonators liegt beim radialen Knoten des Felds, d.h. der ersten Nullstelle der Besselfunktion.

Funktionsweise eines Klystrons

Ein Klystron ist eine Verstärkerröhre für Radiowellen (Rundfunk, Fernsehen, Radar, Beschleuniger etc.). Das Grundprinzip, von dem es viele Abwandlungen gibt, besteht darin, dass eine elektromagnetische Welle in einem Hohlraumresonator die Geschwindigkeit von Elektronen periodisch moduliert, so dass entlang der Laufstrecke ein gepulster Strahl entsteht. In einem zweiten Resonator bewirkt der gepulste Strahl eine elektromagnetische Welle höherer Amplitude. Inzwischen werden Klystrons zunehmend von Halbleiterverstärkern verdrängt. Eine Variante ist das Reflexklystron mit nur einem Resonator, bei dem der Elektronenstrahl nach dem ersten Durchgang von einer negativ geladenen Platte reflektiert wird. Aufgrund des Resonators sind Klystrons immer für eine bestimmte Frequenz ausgelegt.



Wanderfeldröhre (traveling-wave tube TWT)

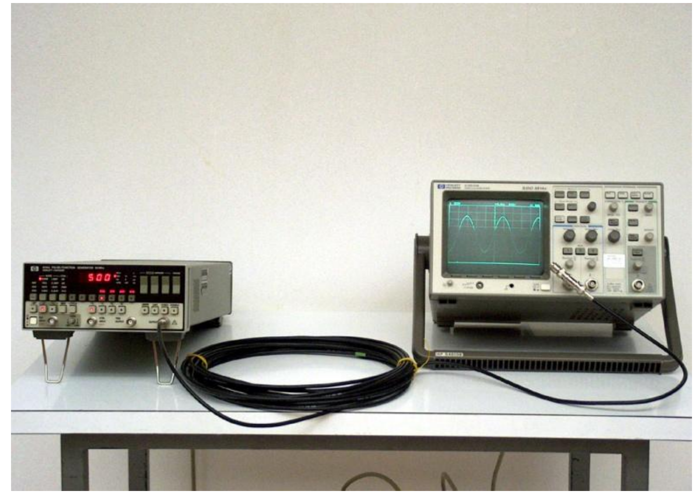
Die Wanderfeldröhre verstärkt die Wellen entlang eines helikalen Leiters in einem Magnetfeld, wobei die Elektronen etwas schneller propagieren als die Phasen-geschwindigkeit der Welle (hier keine Details, eine Erklärungsmöglichkeit ist z.B. der Tschernkow-Effekt). Vorteil ist die hohe Bandbreite, weil kein Resonator die Frequenz einschränkt. Nachteilig ist die schlechte Impedanzanpassung zwischen Koaxialleitung und Helix.

Halbleiterverstärker

Klystron und TWTs wurde um die Zeit des 2. Weltkriegs erfunden und trugen sehr zur Entwicklung von Radar usw. bei. Sie werden inzwischen zunehmend von Halbleiter-verstärkern verdrängt.

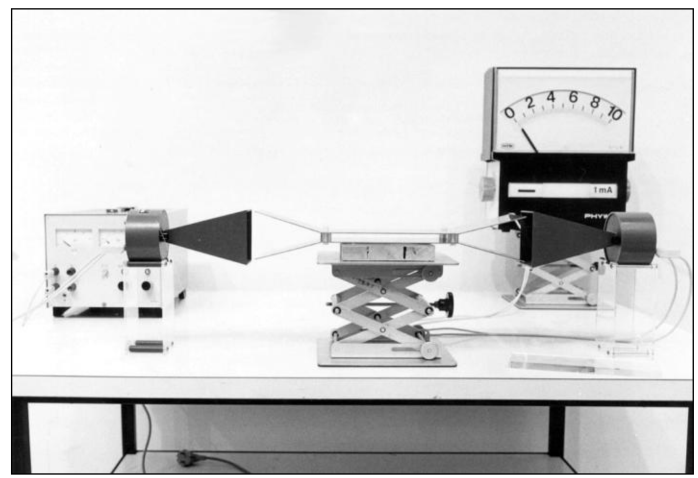
Experimente

Wellenausbreitung auf einem Koaxialkabel



Die Verluste in einem gängigen Koaxialkabel (RG 58) steigen für Signale im MHz-Bereich mit der Frequenz an. Im Versuch wird ein Signal erzeugt, dessen Frequenz über ca. 10 Sekunden von 50 kHz auf 50 MHz ansteigt. Das Oszilloskop am Ende des Kabels zeigt eine abnehmende Amplitude. Das Kabel ist mit 50 Ohm abgeschlossen. Wird der Abschlusswiderstand entfernt, verdoppelt sich die Signalhöhe, weil sich zum ursprünglichen Signal ein reflektiertes Signal addiert.

Mikrowellen im Wellenleiter



Mikrowellen der Frequenz 10,7 GHz und Wellenlänge λ =2,8 cm werden durch einen Wellenleiter gesandt, der aus zwei parallelen Platten besteht. Ein Signal wird beobachtet, wenn Sende- und Empfangsantenne gleich orientiert sind. Bei großen Plattenabstand passieren Wellen jeder Polarisationsrichtung den Wellenleiter. Bei einem Platten-abstand $< \lambda / 2$ wird eine Wellen mit horizontalem E-Feld nicht durchgelassen. Bringt man eine Acrylglasplatte mit Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 2{,}2$ zwischen die Platten, wird die Wellenlänge um $\varepsilon^{-1/2}$ kleiner (siehe später: elektro-magnetische Wellen in Materie) und die Welle wird wieder durchgelassen.