Wiederholung: Dielektrika im homogenen elektrischen Feld

Kapazität im Plattenkondensator um ε erhöht (Dielektrizitätszahl, Permittivität),
Spannung und elektrisches Feld um ε erniedrigt.

Ursache: Polarisation durch Verschiebung oder Orientierung von Ladungen in einem Nichtleiter.

Beispiele (im homogenen *E*-Feld)
- dielektrischer Stab: Polarisationsladung an den Endflächen mit Flächenladungsdichte $\sigma_p = P$
- dielektrischer Stab mit um Winkel θ angeschrägter Endfläche, Fläche größer, Flächenladung kleiner
- dielektrische Kugel

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cdot \cos\theta$$

Die elektrischen Dipolmomente und damit auch die Polarisation P = Gesamtdipolmoment/Volumen ist in erster Näherung proportional zum elektrischen Feld im Dielektrikum.
Verschiedene Materialkonstanten:
α: Polarisierbarkeit zusammen mit der Dichte n der mikroskopischen Dipole
ε: Dielektrizitätszahl
χ: dielektrische Suszeptibilität

$$\chi = \frac{n \cdot \alpha}{\varepsilon_0} = \varepsilon - 1$$

Gibt es auch permanente elektrische Polarisation analog zum Permanentmagneten?
Ja, sogenannten **Elektrete** (oft Polymere, aber auch z.B. Siliziumdioxid), die seit den 1960er Jahren u.a. für sog. Elektretmikrofone verwendet werden (große wirtschaftliche Bedeutung, 2,5 Milliarden solcher Mikrofone werden pro Jahr hergestellt).

Kondensatormikrofon: Eine Membran wird akustisch zu Schwingungen angeregt. Mit einer gegenüberliegenden Platte bildet sie einen Kondensator, dessen Kapazität sich ändert. Dies wird mit einer typischen Spannung von 48 V detektiert.
Elektretmikrofon: Die Membran trägt permanente Oberflächenladungen. Dadurch kann die angelegte Spannung viel geringer gewählt werden (z.B. in Mobiltelefonen).

Wiederholung: Dielektrika im inhomogenen elektrischen Feld

Wenn die Polarisation nicht räumlich konstant ist, kann in einem gegebenen Volumen innerhalb des Dielektrikums ein Ladungsüberschuss bestehen:

$$\Delta Q_p = \int_V \rho_p \cdot dV = -\int_A \vec{P} \cdot d\vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{div}\vec{P} = -\rho_p$$

(Vorzeichen: Die Polarisation ist in Richtung des äußeren elektrischen Felds definiert, während das von den Dipolen erzeugte Feld dem äußeren Feld entgegen gerichtet ist.)

Gesamtes elektrisches Feld:

$$\mathrm{div}\vec{E}_D = \frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{div}\vec{P} \quad \rightarrow \quad \mathrm{div}(\varepsilon_0 \vec{E}_D + \vec{P}) = \mathrm{div}\vec{D} = \rho_f$$

Das D-Feld (dielektrische Verschiebungsdichte) hängt nur von den freien Ladungen ab und kann durch Anwendung des Gaußschen Gesetzes gefunden werden. Das E-Feld ist damit aber noch nicht bekannt.

Beispiel: unendlich langer Draht mit linearer Ladungsdichte λ, der von einem Isoliermaterial mit Radius R umgeben ist.

$$\int_A \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f = D \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \lambda \cdot L \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot r}\vec{e}_r$$

Im Außenraum gilt $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \vec{E} \qquad \varepsilon = 1 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$

aber im Bereich des Isoliermaterials ist das E-Feld nur bekannt, wenn ε bekannt ist.

Das "Hilfsfeld" D muss im allgemeinen Fall nicht wirbelfrei sei. Es gilt hierfür kein Coubomb-Gesetz und es gibt kein Potenzial.

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \varepsilon_0 \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) + \left(\vec{\nabla} \times \vec{P}\right)$$

Grenzflächen

Weil das E-Feld wirbelfrei ist, gilt $E_V^{\parallel} = E_D^{\parallel}$ und außerdem $E_V^{\perp} = \varepsilon \cdot E_D^{\perp}$

Entsprechend gilt für die Verschiebungsdichte $D_V^{\parallel} = \frac{1}{\varepsilon} D_D^{\parallel}$ und $D_V^{\perp} = D_D^{\perp}$

Es gibt also ein "Brechungsgesetz" für elektrische Feldlinien: $\tan\alpha = \frac{E_V^{\parallel}}{E_V^{\perp}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{E_D^{\parallel}}{E_D^{\perp}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \tan\beta$

Das ist ähnlich zum Sprung der senkrechten Feldkomponente an einer geladenen Fläche $E_2^{\perp} - E_1^{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Hier: $E_V^{\perp} - E_D^{\perp} = (\varepsilon - 1) \cdot E_D^{\perp} = \chi \cdot E_D^{\perp} = \frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$

Energie im elektrischen Feld

Das Dielektrikum erhöht die Kapazität eines Kondensators. Bei gegebener Spannung erhöht sich die Energie im E-Feld

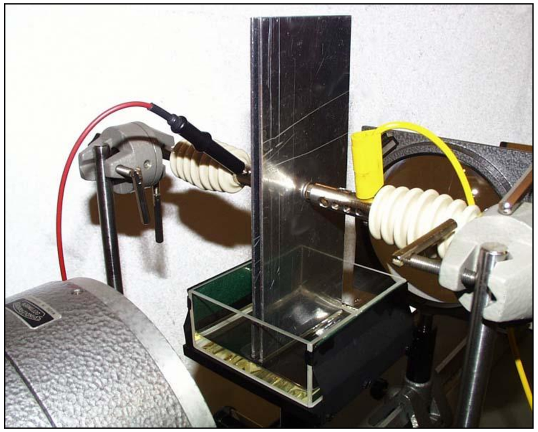
$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot V \quad \rightarrow \quad w = \frac{W}{V} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2 = \frac{1}{2} E \cdot D$$

Die Erzeugung der Polarisation erfordert zusätzliche Energie. Hookesches Gesetz $F = -k \cdot x = Q \cdot E$

$$-\int_0^d F \cdot dx = \int_0^d k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} k \cdot d^2 = \frac{1}{2} \frac{q \cdot E}{d} d^2 = \frac{1}{2} p \cdot E$$

Mit N Dipolen pro Volumeneinheit: $w = \frac{1}{2} P \cdot E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\varepsilon - 1\right) \cdot E^2$ weil $\frac{P}{\varepsilon_0} = \chi \cdot E$

Zusammen mit $w_V = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2$ erhält man das obige Ergebnis.



Experiment

Eine dielektrische Flüssigkeit steigt bei konstanter Spannung zwischen den Kondensatorplatten, weil das Netzgerät die Energie dazu liefert. Ein Teil der Energie aus dem Netzgerät geht aber auch in kinetische Energie des Dielektrikums über. Es ist daher vorteilhaft, ein Kräftegleichgewicht statt einer Energiebilanz anzusetzen (s. Übungsaufgabe 4 auf Blatt 3).

Wie ist es, wenn man vorher die Zuleitungen entfernt (Q = const)? Auch dann steigt die Flüssigkeit, weil sich das elektrische Feld vermindert und elektrische Energie in mechanische Arbeit umgewandelt wird.

2. Der elektrische Strom

Bewegte Ladungen bilden einen elektrischen Strom $I = \frac{dQ}{dt}$ $\quad [I] = 1\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{A}$

Beispiel: Strahlstrom 130 mA im Speicherring DELTA, in dem Elektronen fast mit Lichtgeschwindigkeit kreisen. Der Umfang des Rings beträgt 115,2 m.

Die Umlauffrequenz $f = \frac{c}{U} = \frac{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{115{,}2\ \mathrm{m}} = 2{,}6 \cdot 10^6\ \frac{1}{\mathrm{s}}$ gibt an, wie oft dasselbe Elektron pro Sekunde gezählt wird. Die Umlaufzeit ist $T = \frac{1}{f} = 384\ \mathrm{ns}$

und die umlaufende Gesamtladung ist also $Q = I \cdot T = 0{,}13\ \mathrm{A} \cdot 3{,}84 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{nC}$

$$n = \frac{5 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}} = 3{,}1 \cdot 10^{10}\ \mathrm{e}^-$$

Nicht ganz so offenkundig ist die Ladungsbewegung in Metallen (bewegte Elektronen), Elektrolyten (bewegte Ionen) oder Plasmen (bewegte Elektronen und Ionen).

Strom durch eine Fläche *A*: $I = n \cdot q \cdot \vec{A} \cdot \vec{v}$

Stromdichte = Strom/Fläche $\vec{j} = \frac{I}{A} \vec{e}_v = n \cdot q \cdot \vec{v} = \rho_{el} \cdot \vec{v}$

Strom durch eine geschlossene Fläche $I = \oint \vec{j} \cdot d\vec{a} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \rho_{el} \cdot dV$

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}(\vec{r}, t) \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)}$$