Kugelkondensator

Radien a (innen) und b (außen), Ladung $\pm Q$.
In der inneren Hohlkugel ist das E-Feld null (wie in jeder Hohlkugel, s. oben), außerhalb der äußeren Kugel ist das Feld auch null, weil die eingeschlossene Gesamtladung null ist.

$$a < r < b: \qquad \phi = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cdot\vec{e}_r$$

$$r \le a: \qquad \phi_a = \text{const} = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{1}{a} \qquad (\text{stetig bei } r = a) \qquad \vec{E} = 0$$

$$r \ge b: \qquad \phi_b = \text{const} = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{1}{b} \qquad (\text{stetig bei } r = b) \qquad \vec{E} = 0$$

Kapazität des Kugelkondensators (U ist die Potenzialdifferenz zwischen den beiden Kugeln)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\phi_a - \phi_b} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot a} - \dfrac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot b}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\cdot a\cdot b}{b-a}$$

für b gegen unendlich (nur eine Kugel):

$$C = \frac{Q}{\phi_a} = 4\pi\varepsilon_0\cdot a$$

Energie des elektrischen Felds

Aufladen einer Kugel mit Radius R erfordert Energie

$$\varphi_R = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R} \qquad dW = dQ\cdot\varphi_R \qquad W = \int dW = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R}\int Q\cdot dQ = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R}\frac{Q^2}{2}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2 \qquad \text{mit} \qquad C = 4\pi\varepsilon_0\cdot R$$

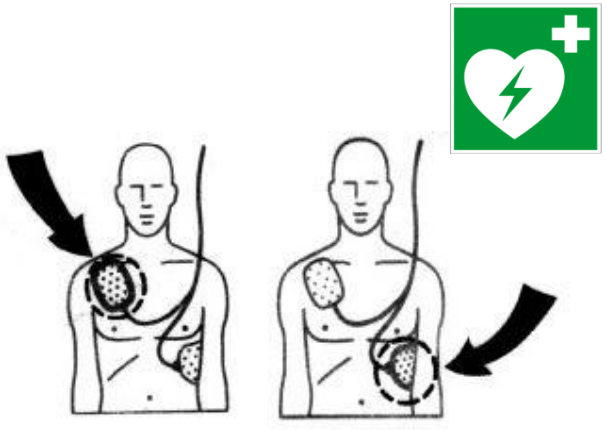
Energie des elektrischen Felds am Beispiel des Plattenkondensators:

$$W=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0\frac{A}{d}\cdot(E\cdot d)^2=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0\cdot E^2\cdot A\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0\cdot E^2\cdot V$$

Allgemein: Energiedichte (Energie/Volumen) des elektrischen Felds: $w=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0\cdot E^2$

Beispiel: Defibrillator

Ein Kondensator wird in sehr kurzer Zeit (wenige ms) entladen und erzeugt einen Stromstoß von etwa 1 Ampere. Dies dient dazu, das sogenannte Kammerflimmern zu beenden, eine Herzrhythmusstörung, die in vielen Fällen dem "plötzlichen Herztod" vorausgeht.

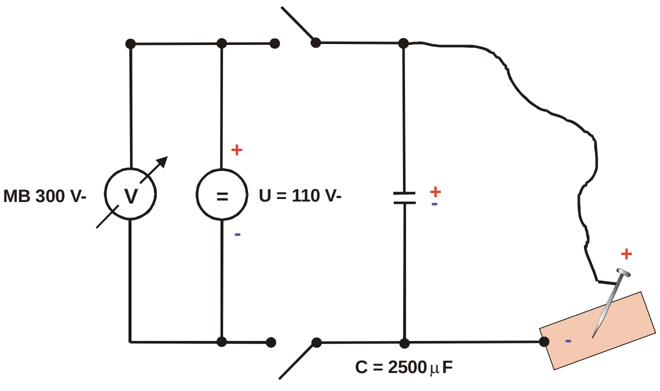


$C=1000\ \mu\text{F} \qquad U=750\ \text{V}$

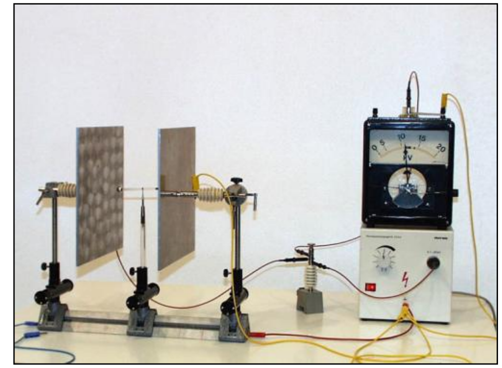
$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}10^{-3}\frac{\text{C}}{\text{V}}\cdot 750^2\,\text{V}^2=281\ \text{C}\cdot\text{V}=281\ \text{J}$$

Experiment: Schnelles Entladen eines Kondensators

Ein Kondensator wird aufgeladen (U = 110 V, C = 2500 µF). Die Ladung beträgt demnach Q = 0,275 C und die gespeicherte Energie W = 30,25 J. Durch Berühren eines Kupferblechs mit einer Nagelspitze entlädt sich der Kondensator mit einem lauten Knall.

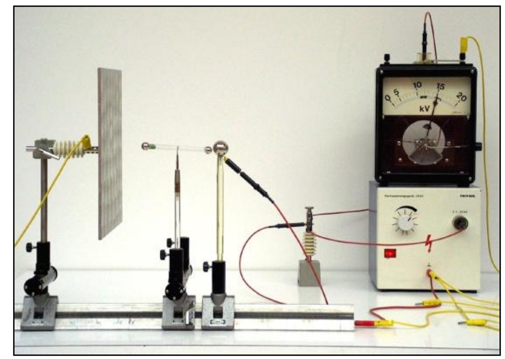


Experiment: Elektrischer Dipol im homogenen und inhomogenen elektrischen Feld



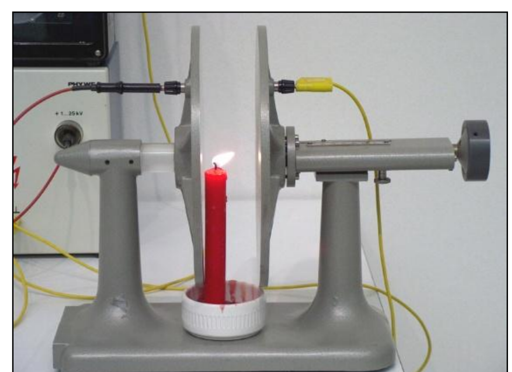
Homogenes Feld: Zwei Kondensatorplatten. Der Dipol richtet entlang der elektrischen Feldlinien aus.

Inhomogenes Feld: Eine einzelne Glaskugel (Dielektrikum) an einem Faden demonstriert die Kraft auf einen Dipol im inhomogenen Feld.



Experiment: Kerzenflamme in einem Kondensator

Eine Kerzenflamme enthält positive Kohlenstoffionen und positiv geladene Rußpartikel. Sie wird daher von der negativen Kondensatorplatte angezogen.



1.7 Dielektrika im elektrischen Feld

Wenn man in einen Plattenkondensator bei konstanter Ladung einen Isolator (**Dielektrikum**) einbringt, sinkt die anliegende Spannung, d.h. die Kapazität (Ladung pro Spannung) mit Dielektrikum (D) hat sich gegenüber der Kapazität mit Vakuum oder Luft (V) um einen Faktor ε erhöht. Dieser Faktor heißt **relative Dielektrizitätskonstante**, **Dielektrizitätszahl** oder **Permittivität**. Typische Werte:

Glas	ca. 3-5
Porzellan	ca. 6-7
Keramiken	100-1000
Wasser	81
Luft	1,0006

Ladung konstant $Q = C \cdot U \quad \rightarrow \quad U_D = \frac{U_V}{\varepsilon} \qquad C_D = \varepsilon \cdot C_V$

$$\rightarrow \quad E_D = \frac{E_V}{\varepsilon}$$

Auch das elektrische Feld ist um ε vermindert. Ursache ist die Polarisierung des Dielektrikums. Bei der Influenz in Leitern bewegen sich Ladungen unter dem Einfluss des *E*-Felds, so dass das Innere des Leiters feldfrei ist. Ähnlich ist es im Dielektrikum, aber weil die Ladungen nicht frei beweglich sind, wird das äußere Feld nur teilweise kompensiert. Im *E*-Feld bilden sich elektrische Dipole, deren Dipolmoment proportional zum Feld ist:

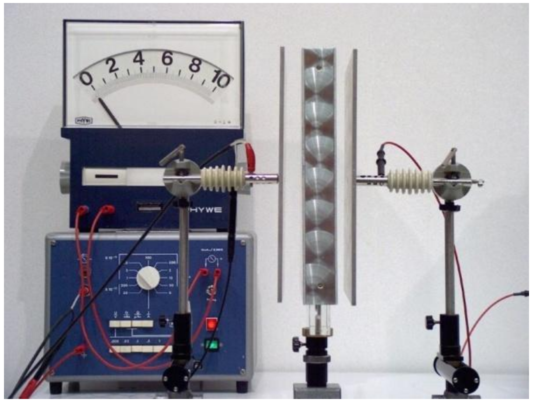
$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}_D$$

wobei α die **Polarisierbarkeit** eine materialabhängige Konstante ist. Im allgemeinen Fall ist die Polarisation richtungsabhängig und α ist ein Tensor. Manche Dielektrika bestehen aus Molekülen mit einem Dipolmoment, das sich im *E*-Feld ausrichtet (Orientierungspolarisation, z.B. Wasser), andere bilden Dipole durch Verschiebungen der Elektronenhülle gegen den Atomkern (Verschiebungspolarisation, nur ca. 1/10.000 Atomdurchmesser). Die Vektorsumme aller Dipolmomente pro Volumen heißt **Polarisation**:

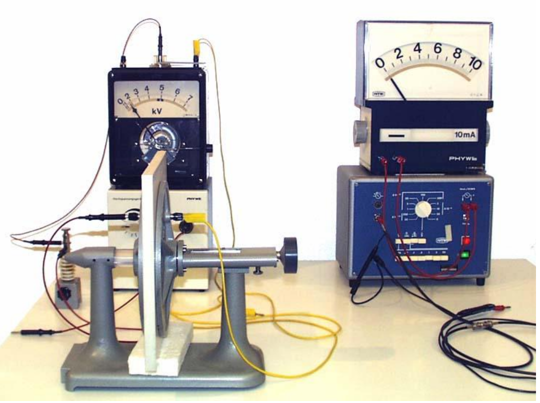
$$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_i \vec{p}_i = n \cdot \alpha \cdot \vec{E}_D \qquad \left|\vec{P}\right| = n \cdot q \cdot d$$

(*n* = Zahl der Dipole/Volumen, *q* = Ladung im Atom oder Molekül, *d* = Abstand der Ladungen)

Experimente



Wird eine leitende Platte zwischen zwei Kondensatorplatten gebracht, erhöht sich die Kapazität entsprechend der Verringerung des Abstands in Luft. Experimentell:
- bei konstanter Spannung steigt die Ladung
- bei konstanter Ladung sinkt die Spannung.



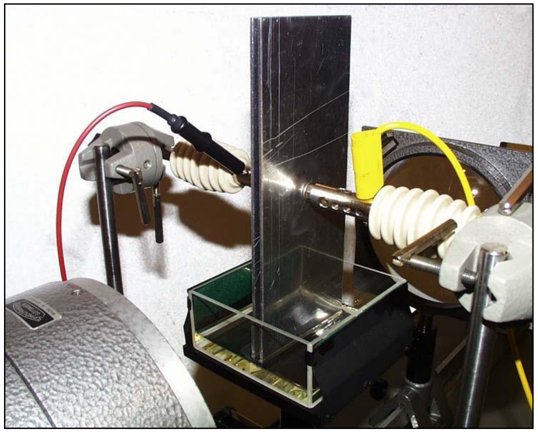
Wird ein Dielektrikum zwischen die Kondensatorplatten gebracht, geschieht das Gleiche, aber die Erhöhung der Kapazität ist geringer, weil die Ladungen im Dielektrikum nicht so flexibel sind wie im Leiter. Annahme: Plattenabstand *d*, Dicke des Dielektrikums *b*.
Diese Anordnung kann man wie zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren behandeln:
1. Kondensator mit Luft ($\varepsilon = 1$) und Plattenabstand $d - b$.
2. Kondensator mit Dielektrikum ($\varepsilon > 1$) und Abstand b.
Bei Kondensatoren in Reihe addieren sich die inversen Kapazitäten:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d-b}{\varepsilon_0 \cdot A} + \frac{b}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot A} = \frac{\varepsilon(d-b)+b}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot A} = \frac{d-b+b/\varepsilon}{\varepsilon_0 \cdot A}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d - b \cdot (\varepsilon - 1)/\varepsilon}$$

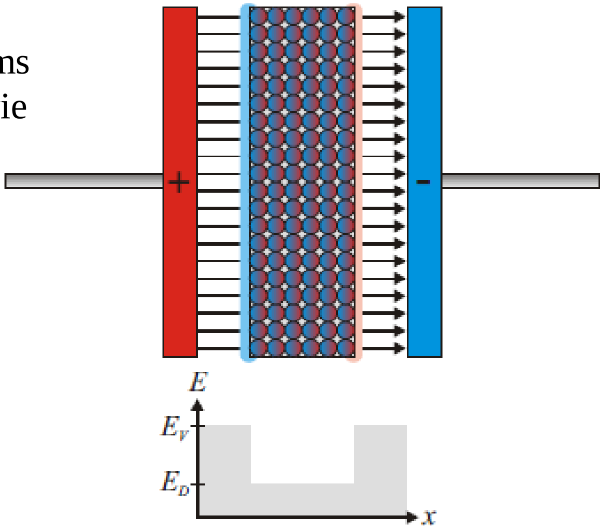
Einbringen eines Leiters entspricht in diesem Ausdruck $\varepsilon \to \infty$.

Eine dielektrische Flüssigkeit, in die das untere Ende eines Plattenkondensators eingetaucht wird, steigt zwischen den Platten nach oben, sobald eine Spannung angelegt wird



Durch Polarisation entstehen an den Oberflächen des Dielektrikums Polarisationsladungen. Ihre Flächendichte hat denselben Betrag wie die Polarisation

$$\sigma_{pol} = \frac{n \cdot q \cdot d \cdot A}{A} = P$$



Die Quellen des *E*-Felds im Vakuum sind die äußeren ("freien") Ladungen auf den Kondensatorplatten.
Die Quellen des Felds im Dielektrikum sind
- die freien Ladungen
- die gebundenen Polarisationsladungen

$$E_V = \frac{\sigma_{frei}}{\varepsilon_0} \qquad E_D = \frac{\sigma_{frei} - \sigma_{pol}}{\varepsilon_0} = E_V - \frac{\sigma_{pol}}{\varepsilon_0} = E_V - \frac{P}{\varepsilon_0}$$

$$P = n \cdot \alpha \cdot E_D = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E_D \quad \rightarrow \quad E_D = E_V - \frac{\varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E_D}{\varepsilon_0} = E_V - \chi \cdot E_D$$

$$\rightarrow \quad E_D = \frac{1}{1+\chi} E_V = \frac{1}{\varepsilon} E_V$$

d.h. $\chi = \dfrac{n \cdot \alpha}{\varepsilon_0} = \varepsilon - 1$ dielektrische Suszeptibilität (materialabhängige, dimensionslose Konstante)

Gaußsches Gesetz in Materie: die dielektrische Verschiebungsdichte

Im inhomogenen E-Feld entstehen Polarisationsladungen nicht nur an der Oberfläche, sondern auch im Volumen des Dielektrikums

$$\mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_{pol}$$

(das *E*-Feld zeigt von der positiven zur negativen Ladung, *P* von der negativen zur positiven Ladung. Durch diese Definition zeigen beide Vektoren im polarisierten Dielektrikum in dieselbe Richtung)

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho_{frei} + \rho_{pol}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{frei} - \mathrm{div}\,\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{div}\,\left(\varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}\right) = \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_{frei}$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{frei}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1) \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \vec{E}$$

D = dielektrische Verschiebung, ein "Hilfsfeld" das für manche Anwendungen praktisch ist, aber in vielen Lehrbüchern gar nicht behandelt wird. Einheit:

$$[D] = [\varepsilon_0 E] = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

D und *E* sind sehr verschieden:

- es gibt für *D* kein Coulombsches Gesetz
- die Rotation von *D* ist i.d.R. ungleich null
- es gibt für *D* kein elektrostatisches Potenzial

Experiment (an der Uni Hamburg)

Blasen in einer dielektrischen Flüssigkeit werden in den Bereich des schwächeren elektrischen Felds gezogen