Maxwellsche Gleichungen

Bisher: Elektrostatik im Vakuum (keine Felder in Materie), keine Magnetfelder

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad \xleftrightarrow{\text{Gauß}} \quad \int_A \vec{E}\cdot d\vec{a}=\int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}dV=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \quad \xleftrightarrow{\text{Stokes}} \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{r}=0$$

differenzielle Form $\leftrightarrow$ integrale Form

Verschiedene Ladungsverteilungen

bisher: Punktladung, homogen geladener Stab, Plattenkondensator

(i) Geladene Hohlkugel mit konstanter Flächenladungsdichte σ

$$Q=4\pi\cdot\sigma\cdot R^2$$

$$r\geq R: \quad \int_A \vec{E}\cdot d\vec{A}=E\cdot 4\pi\cdot r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E(r)=\frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\phi(r)=\int_r^\infty E(r)\cdot dr=\frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$r<R: \quad \int_A \vec{E}\cdot d\vec{A}=0 \quad \rightarrow \quad E(r)=0 \qquad \phi(r)=\text{const}=\frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

(ii) Geladene Vollkugel mit konstanter Ladungsdichte ρ

$$Q = \frac{4}{3}\pi \cdot \rho \cdot R^3$$

$$r \geq R: \quad \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \qquad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$r < R: \quad \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3}{R^3} \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

$$\phi(r) = -\frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{r^2}{2R^3} + \text{const} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right)$$

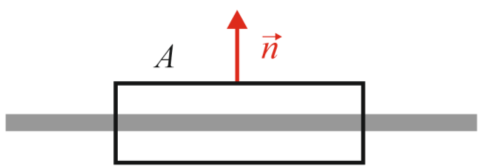
vgl. Gravitationsfeld und -potenzial

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

$$\text{const} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{1}{2R}$$

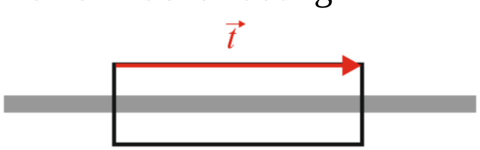
(iii) Elektrisches Feld an geladenen Flächen

"Gauß-Box" mit unterer/oberer Fläche A, Stirnflächen ≈ 0, Flächenladung σ, Normalvektor n nach oben:
Normalkomponente des E-Felds springt um σ/ε_0
(Spezialfall unendlich ausgedehnte Platt s. letzte Vorlesung)



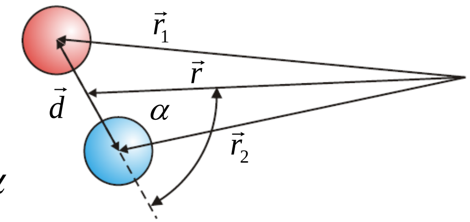
$$\int_{2A} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \vec{n} \cdot \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E_2^{\perp} - E_1^{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Linienintegral mit Tangentialvektor t : Tangentialkomponente ist stetig an einer Flächenladung



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 = \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \cdot \vec{t} \quad \rightarrow \quad E_2^{\parallel} = E_1^{\parallel}$$

(iv) Elektrischer Dipol $q_1 = -q_2 = q$



Potenzial

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{d}/2|} - \frac{1}{|\vec{r}+\vec{d}/2|}\right) \approx \frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{d}{r^2}\cos\alpha$$

weil $$\frac{1}{|\vec{r}\pm\vec{d}/2|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r}\pm\vec{d}/2)^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1\pm\vec{r}\cdot\vec{d}/r^2 + d^2/(4r^2)}} \approx \frac{1}{r}\left(1\mp\frac{1}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^2}\right)$$

Elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\phi_D(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\left(\vec{r}\cdot\vec{d}\cdot\mathrm{grad}\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\cdot\mathrm{grad}(\vec{r}\cdot\vec{d})\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\left(r\cdot d\cdot\cos\alpha\cdot 3\frac{\vec{e}_r}{r^4} - \frac{1}{r^3}\vec{d}\right) = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r^3}\left(3p\cdot\vec{e}_r\cdot\cos\alpha - \vec{p}\right)$$

$\vec{p} = q\cdot\vec{d}$ elektrisches Dipolmoment

Drehmoment eines elektrischen Dipols in einem äußeren homogenen elektrischen Feld

$$\vec{D} = \vec{d}\times\vec{F} = \vec{d}\times q\cdot\vec{E} = \vec{p}\times\vec{E}$$

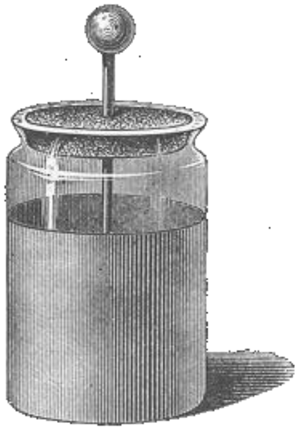
Kraft auf einen elektrischen Dipol in einem äußeren inhomogenen elektrischen Feld

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) - E(\vec{r})\right) \approx q\cdot\frac{d\vec{E}}{d\vec{r}}\cdot\vec{d} = \vec{p}\cdot\frac{d\vec{E}}{d\vec{r}}$$

zum Beispiel: x-Komponente

$$F_x = \vec{p}\cdot\mathrm{grad}E_x = p_x\cdot\frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y\cdot\frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z\cdot\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

1.6 Der Kondensator


Leidener Flasche
(um 1800)

Ein Kondensator speichert Ladungen und damit auch Energie in einem elektrischen Feld. Kondensatoren bestehen i.d.R. aus zwei leitenden Objekten. Beispiele:
- Leidener Flasche (historisch)
- Plattenkondensator
- Kugelkondensator (zwei konzentrische Kugelflächen)
- Drehkondensator (variable Fläche)

In der Elektronik verwendete Kondensatoren bestehen i.d.R. aus aufgerollten Platten (große Fläche, kleiner Abstand) mit einem "Dielektrikum" zwischen den Platten (Material, das bewirkt, dass bei gegebener Spannung mehr Ladung im Kondensator gespeichert wird, s. später).

Generell: Je höher die elektrische Spannung (Potenzialunterschied), desto höher die Ladung:

$$Q = C \cdot U \qquad [C] = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = 1\,\mathrm{F}\ \text{(Farad)} \qquad \text{Kapazität}$$

Plattenkondensator

Plattenabstand $d = x_2 - x_1$

Ansatz mit 1-dim. Laplace-Gleichung führt zu einem linearen Verlauf des Potenzials:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{(Laplace)} \quad \xrightarrow[\text{integriert}]{} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = a \quad \xrightarrow[\text{integriert}]{} \quad \phi(x) = a \cdot x + b$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi$$

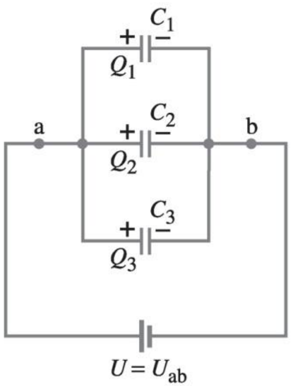
$$E = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \mathrm{const} = \frac{U}{d}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\cdot\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad U = \frac{Q\cdot d}{A\cdot\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0\frac{A}{d}$$

große Fläche, kleiner Abstand
→ große Kapazität

(weiter oben gezeigt s. Gaußsches Gesetz)

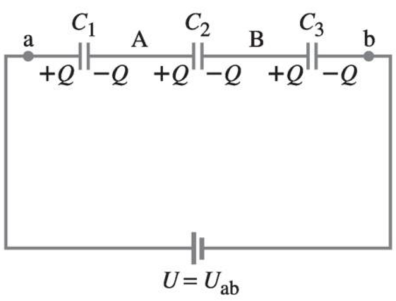
Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren
am Beispiel von Plattenkondensatoren



$$C = \frac{Q}{U}$$

$$\text{parallel:} \qquad C_{\text{gesamt}} = \frac{1}{U}\sum_i Q_i = \sum_i C_i$$

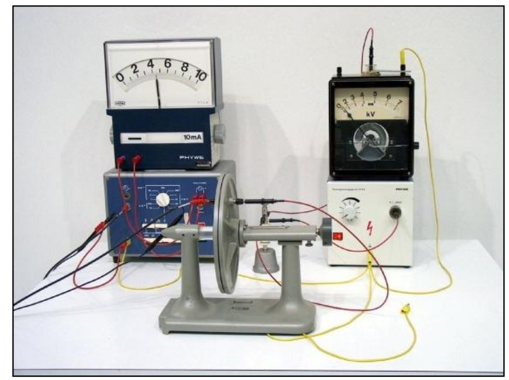
$$\text{in Reihe:} \qquad \frac{1}{C_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{Q}\sum_i U_i = \sum_i \frac{1}{C_i}$$



Experimente mit Plattenkondensatoren

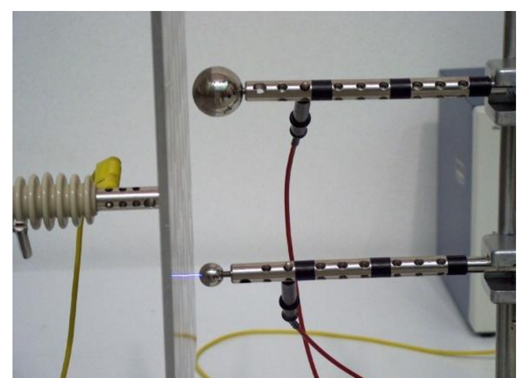
Mit zwei verschiedenen Plattenkondensatoren (s. Abb. rechts) und Messgeräten (Messung der elektrischen Feldstärke oben, Messung der Ladung auf einer Kondensatorplatte unten) wurden Versuche durchgeführt. Qualitativ wurde gezeigt:
- die elektrische Feldstärke erhöht sich, wenn die angelegte Spannung erhöht wird (weil damit auch die Ladung auf den Kondensatorplatten größer wird).
- die elektrische Feldstärke erhöht sich, wenn der Plattenabstand verkleinert wird (weil damit die Kapazität und bei fester Spannung wieder die Ladung größer wird).
- die Ladung auf den Kondensatorplatten wird größer, wenn der Plattenabstand verkleinert wird.

Quantitativ folgten die angezeigten Werte nicht immer der Erwartung. Ein möglicher Grund ist eine "Streukapazität", die neben der Kapazität der Platten existiert und durch die Geometrie der Anordnung (Zuleitungen, Standfuß etc.) erzeugt wird.

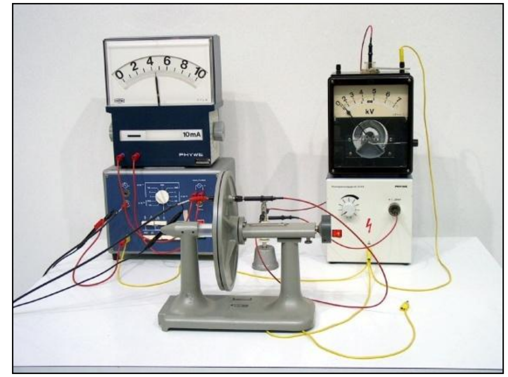


Experiment: Funkenentladung

An zwei metallische Kugeln, die einer geerdeten Platte gegenüber stehen, wird die gleiche Hochspannung angelegt. Durch demokratischen Beschluss wurde entschieden, dass eine Entladung (Funke wie in Abb. rechts) zuerst von der kleinen Kugel ausgehen müsse, was tatsächlich der Fall war (Erklärung folgt später nach Berechnung der Kapazität einer Kugel) .



Experiment zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten



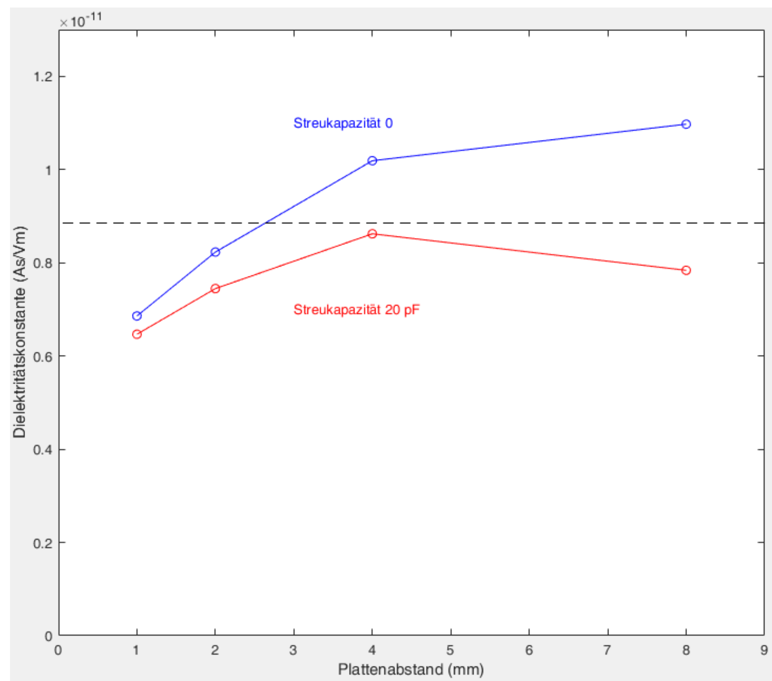
Durch die direkte Ladungsmessung am Plattenkondensator kann die Dielektrizitätskonstante ε_0 bestimmt werden:

$$\varepsilon_0 = \frac{Q}{U}\frac{d}{A}$$

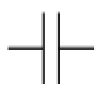
mit der Fläche A = 510,4 cm^2 und Plattenabstand d von 1 bis 8 mm. Die Ladung Q wird über einen Präzisionskondensator elektronisch bestimmt und als Gleichstrom angezeigt (1 µA entspricht 1 nC). Die ermittelten Werte für ε_0 (blaue Kurve) ähneln dem Literaturwert (gestrichelte Linie), nehmen aber mit d zu. Diese Abhängigkeit wird durch Einführung einer Streukapazität C_S reduziert

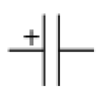
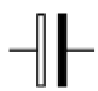
$$\varepsilon_0 = \left(\frac{Q}{U} - C_s\right)\frac{d}{A}$$

allerdings sind die so berechneten Werte (rote Kurve) durchweg etwas zu klein.

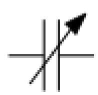


Symbole für Kondensatoren (Auswahl)

allgemein 

gepolter Kondensator  

(alt)

Drehkondensator
(ohne Hilfsmittel einstellbar) 

Trimmkondensator
(mit Hilfsmittel einstellbar)