

1.3 Das elektrische Feld

Elektrische Feldstärke = Kraft auf Probeladung normiert

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

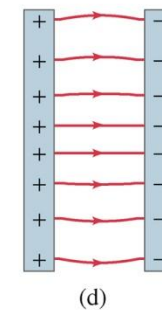
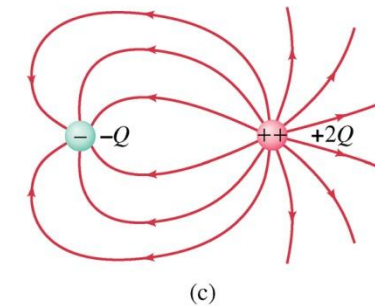
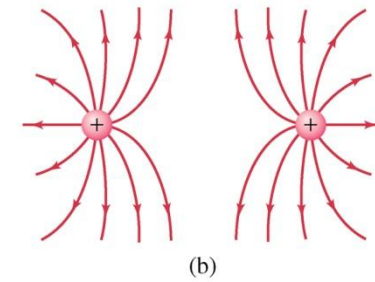
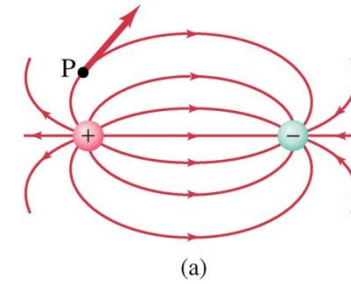
$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad [E] = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$1 \text{ V (Volt)} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Superpositionsprinzip: von n Ladungen ausgeübte Kraft bzw. Feldstärke

$$\vec{F}(\vec{r}_q) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \vec{e}_i \quad r_i = \text{Abstände zur Probeladung } q$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \vec{e}_i \quad r_i = \text{Abstände zum Beobachtungspunkt}$$

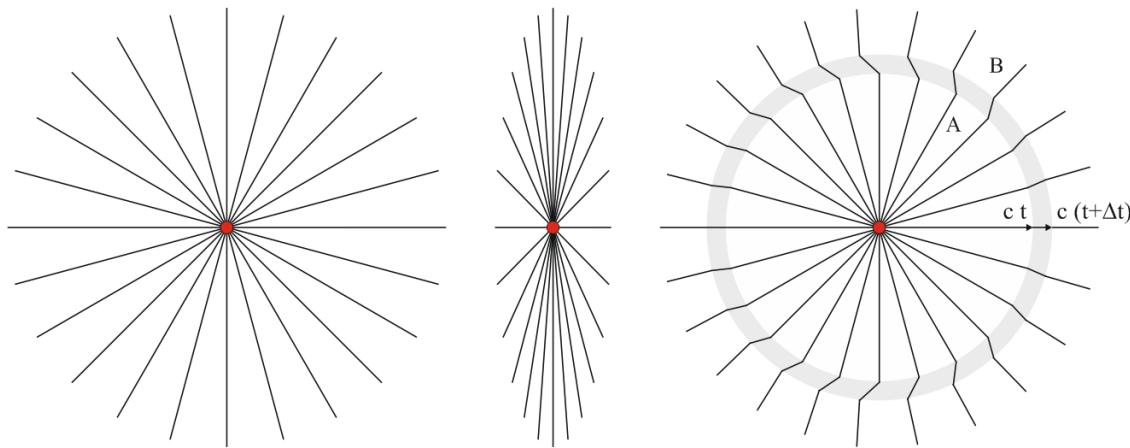


(Abbildungen: Giancoli, Physik)

Feldlinien

Die Anwesenheit einer elektrischen Ladung verändert den umgebenden Raum, was man durch eine (kleine) "Probeladung" testen kann, die an jedem Raumpunkt eine Kraft erfährt. Es entsteht ein Vektorfeld, das man durch Feldlinien visualisieren kann. Die Kraftrichtung ist tangential zu einer Feldlinie, die Größe der Kraft auf eine Probeladung lässt sich durch die Dichte der Feldlinien darstellen.

- Feldlinien beginnen und enden stets an einer Ladung
- Feldlinien haben eine Richtung (Definition: von + nach -)
- Feldlinien schneiden sich nicht (Feld an einem Punkt ist eindeutig)
- Feldlinien verlaufen so, als würden sie einander abstoßen
- Feldlinien verlaufen möglichst direkt zwischen entgegengesetzten Ladungen
- Feldlinien enden senkrecht auf metallischen Oberflächen
- elektrische Dipole (z.B. Grießkörner, Eisenspäne) richten sich entlang der Feldlinien aus
- Feldlinien folgen einer beschleunigten Ladung verzögert (Strahlung)



Links: Feldlinien einer ruhenden oder langsam bewegten Ladung

Mitte: Feldlinien einer Ladung mit konstanter relativistischer Geschwindigkeit

Rechts: Momentaufnahme der Feldlinien einer Ladung zur Zeit t nach einer kurzzeitigen (Δt) Beschleunigung

Der Millikan-Versuch

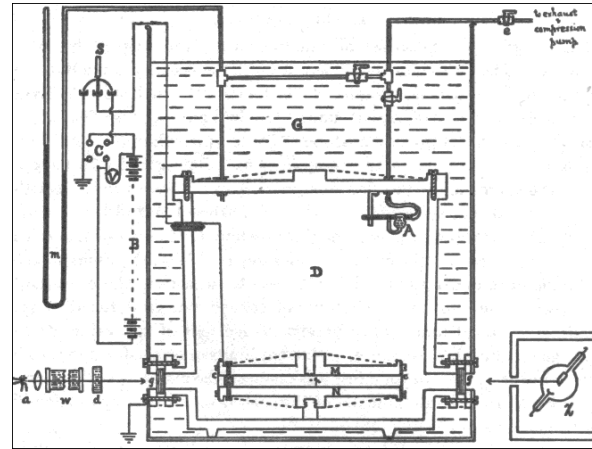
Robert Millikan und Harvey Fletcher 1910

ON THE ELEMENTARY ELECTRICAL CHARGE AND THE
AVOGADRO CONSTANT.

BY R. A. MILLIKAN.

I. INTRODUCTORY.

THE experiments herewith reported were undertaken with the view of introducing certain improvements into the oil-drop method¹ of determining e and N and thus obtaining a higher accuracy than had before been possible in the evaluation of these most fundamental constants.



Robert Andrews Millikan
(1868-1953)
Nobelpreis 1923

Schwebende geladene Öltröpfchen in einem elektrischen Feld werden mit einem Mikroskop beobachtet:

Gewichtskraft = Kraft des elektrischen Felds + Auftrieb in Luft.

Um ihren Radius (und damit Masse und Volumen) zu bestimmen, wird das elektrische Feld abgeschaltet:

Gewichtskraft = Reibungskraft + Auftrieb in Luft.

Aus der Geschwindigkeit v der fallenden Tröpfchen wird der Radius bestimmt (Stokessche Reibung $\sim v$).

Die so bestimmte Ladung war immer ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung.

Der elektrische Fluss

durch ein Flächenelement dA : $d\Phi_{\text{el}} = \vec{E} \cdot d\vec{A}$

durch die Gesamtfläche A : $\Phi_{\text{el}} = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Beispiel: Elektrischer Fluss
durch eine Kugeloberfläche
mit der Ladung Q im Zentrum

$$\Phi_{\text{el}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{1}{r^2} dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Raumwinkel

Divergenz und Satz von Gauss-Ostrogradski

Integral der Normalkomponente eines Vektorfelds über eine geschlossene Oberfläche =
Integral der Divergenz des Vektorfelds über das eingeschlossene Volumen dh. die Divergenz sagt etwas darüber, "wie viele Feldlinien in das Volumen eintreten bzw. herauskommen" (Quellenstärke)

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV$$

$$\begin{aligned} & E_x(x+dx) \cdot dy \cdot dz - E_x(x) \cdot dy \cdot dz \\ & + E_y(y+dy) \cdot dx \cdot dz - E_y(y) \cdot dx \cdot dz \\ & + E_z(z+dz) \cdot dx \cdot dy - E_z(z) \cdot dx \cdot dy \\ & \approx \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \operatorname{div} E \cdot dV \end{aligned}$$

mit $E_x(x+dx) \approx E_x(x) + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx$ usw.

Wichtiges Beispiel: Gaußsches Gesetz

Kugelförmige Oberfläche mit Radius R um eine Punktladung:

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot dV = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

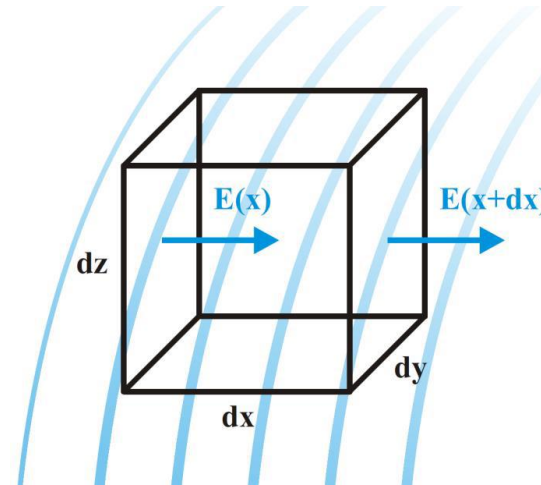
Ladungen sind Quellen
bzw. Senken des
elektrischen Felds



Johannes Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)



Michail Wassilijowitsch Ostrogradski
(1801-1862)



Anwendungsbeispiele

- 1) Elektrisches Feld eines mit konstanter Ladungsdichte λ (Linienladung) besetzten Stabs:
Betrachte einen Zylinder von Radius R und Länge L um den Stab

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 2\pi R \cdot L = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R}$$

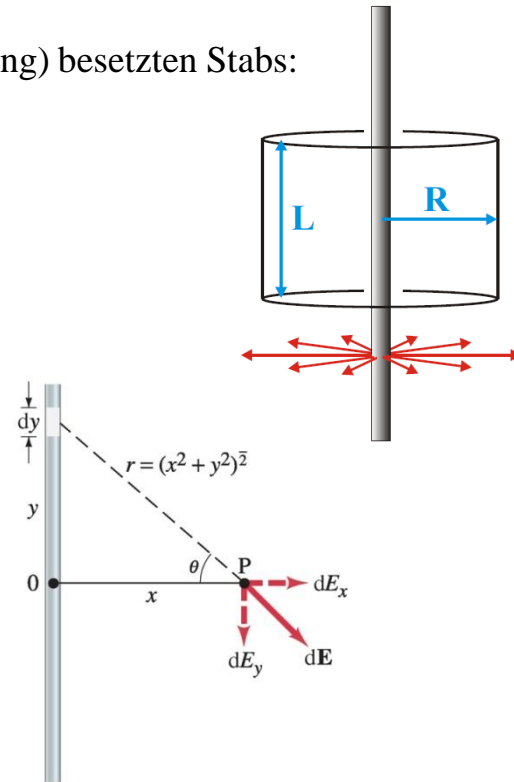
Es geht auch komplizierter:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{(x^2 + y^2)}$$

$$E = E_x = \int_{-\infty}^{\infty} dE(y) \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \theta dy$$

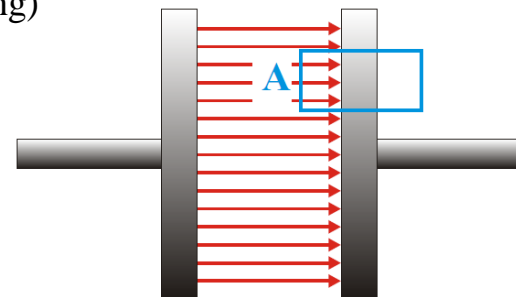
$$y = x \tan \theta \quad dy = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta \quad x^2 + y^2 = x^2 (1 + \tan^2 \theta) = \frac{x^2}{\cos^2 \theta}$$

$$\rightarrow E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x}$$



- 2) Plattenkondensator mit homogener Ladungsdichte σ (Flächenladung) besetzt. Betrachte ein Volumen mit einer Stirnfläche A senkrecht zu den Feldlinien

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot A}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



(Abbildungen: Giancoli, Physik)

1.4 Elektrostatisches Potenzial und Spannung

Das elektrische Feld ist konservativ

- radialsymmetrisches Zentralkraftfeld \rightarrow konservativ

- das bedeutet u.a. $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ist wegunabhängig $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ $\text{rot } \vec{E} = 0$

- konservativ \rightarrow skalares Zentralpotenzial definierbar

Benötigte Arbeit, um eine Ladung im E -Feld zu bewegen

(Kleine) punktförmige Probeladung q im Feld einer Punktladung Q

$$W = \text{Kraft} \cdot \text{Weg} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \cdot \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Vorzeichen? Annahme: $r_2 > r_1$

$q \cdot Q > 0$ (gleichnamige Ladungen) $\rightarrow W > 0$ (Energie gewonnen, Abstoßung)

$q \cdot Q < 0$ (ungleichnamige Ladungen) $\rightarrow W < 0$ (Arbeit aufgewandt, Anziehung)

Potenzial im Punkt P

Verrichtende Arbeit,
wenn Einheitsladung
ins Unendliche
gebracht wird

$$\varphi(P) = \frac{W}{q} = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad \varphi(\infty) = 0$$

$$\varphi(P) = -\int_P^\infty \text{grad } \varphi \cdot d\vec{s} \quad \text{z.B.} \quad -\int_P^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx = -\varphi(x) \Big|_P^\infty = \varphi(x) \Big|_\infty^P = \varphi(P)$$

Elektrostatistisches Potenzial (= potenzielle Energie / Ladung)

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten ist

$$U = \phi(P_1) - \phi(P_2) = \int_{P_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} - \int_{P_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Elektrische Spannung (Differenz der potenziellen Energie / Ladung)

$$[U] = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{m} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3} = 1 \text{ V (Volt)}$$

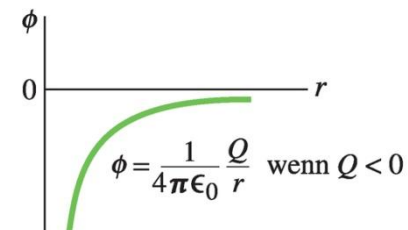
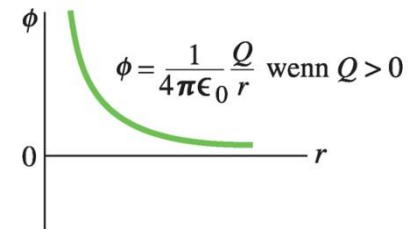
Die Energieeinheit Elektronenvolt (eV)

bietet sich bei der Beschreibung von Elementarladungen an, die eine Potentialdifferenz durchlaufen haben, z.B. in Teilchenbeschleunigern, aber auch beim Wechsel zwischen Energieniveaus z.B. Elektronen in der Atomhülle:

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$



Alessandro Guiseppè Antonio
Anastasio Graf von Volta
(1745-1827)



Beispiele:

Beschleunigte Elektronen in der Röntgenröhre

Spannung von einigen 10 kV können mit geeigneter Elektronik erzeugt werden. In einer Röntgenröhre werden hiermit Elektronen von einer Kathode (negativer Pol) auf eine Anode (positiver Pol) beschleunigt, die aus einem Material hoher Kernladungszahl besteht (z.B. Kupfer mit Wolfram $Z = 74$). Durch die abrupte Abbremsung entsteht (wie stets bei beschleunigten Ladungen) elektromagnetische Strahlung, in diesem Fall mit einem Spektrum, das bei der Elektronenenergie E endet, z.B. $E = 50 \text{ keV}$ entspricht einer Wellenlänge von $0,025 \text{ nm}$, also Röntgenlicht.
(Faustregel: Wellenlänge in nm = $1,24 / \text{Energie in keV}$)

Beschleunigte Ionen in einem Van-de-Graaf-Generator

Hohe Spannungen lassen sich auch durch mechanischen Transport von Ladungen erzeugen, z.B. mit einem Bandgenerator (Van-de-Graaf-Generator). Hiermit lassen sich auch Teilchen beschleunigen. Die Beschleunigungsspannung liegt typisch um 10 MV (max. 18 MV Vivitron in Strasbourg), wenn sich der Generator in einem Gas mit hoher Durchschlagsfeldstärke befindet (SF_6).

Ionen können die Beschleunigungsspannung 2x durchlaufen (Tandem-Van-de-Graaf):

- 1) negatives Ion wird zum "Terminal" beschleunigt, das auf positiver Spannung liegt
- 2) Elektronen werden abgestreift ("Stripper"-Gas oder -Folie) und vom Terminal abgestoßen

