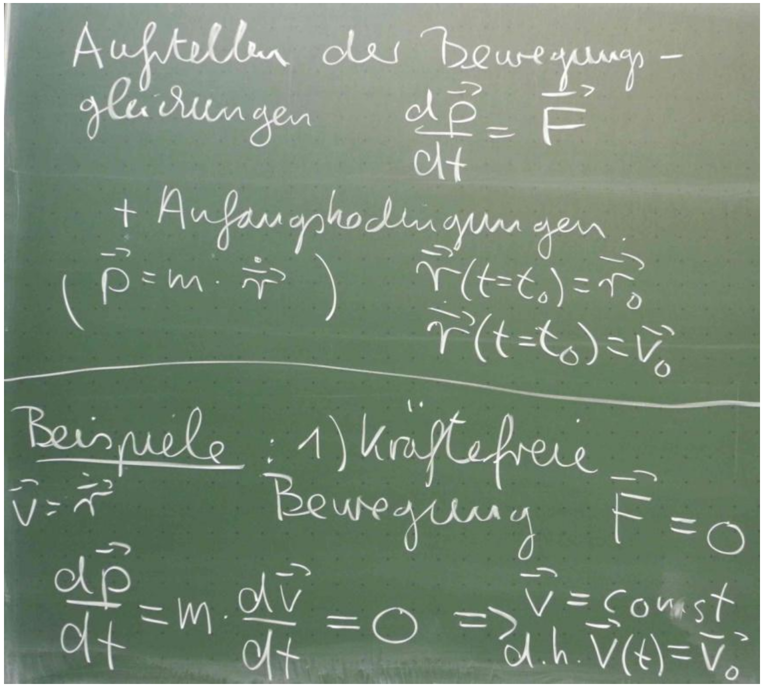


Aufstellen der Bewegungsgleichungen $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

+ Anfangsbedingungen

$(\vec{p} = m \cdot \dot{\vec{r}})$ $\vec{r}(t=t_0) = \vec{r}_0$

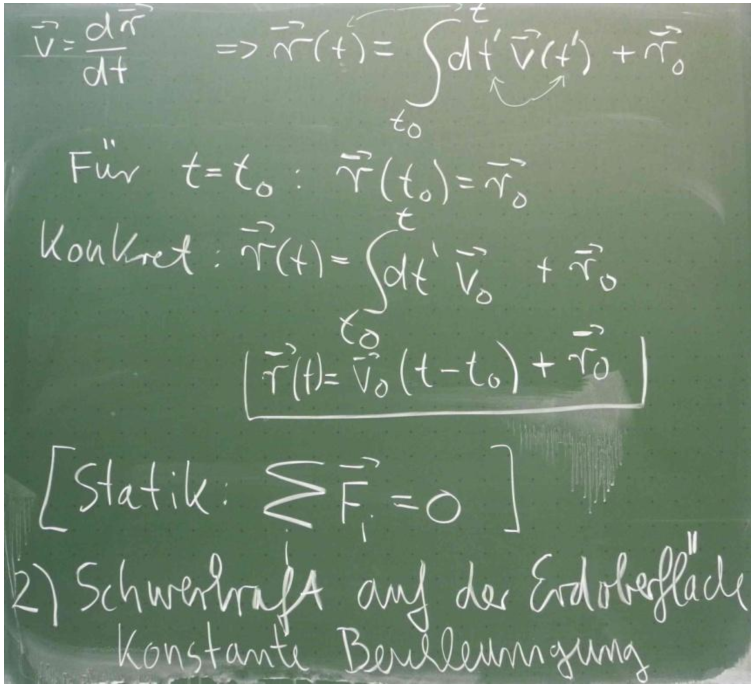
$\dot{\vec{r}}(t=t_0) = \vec{v}_0$

Beispiele: 1) Kräftefreie Bewegung $\vec{F} = 0$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} = const$

d.h. $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$



$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \, \vec{v}(t') + \vec{r}_0$

Für $t = t_0$: $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$

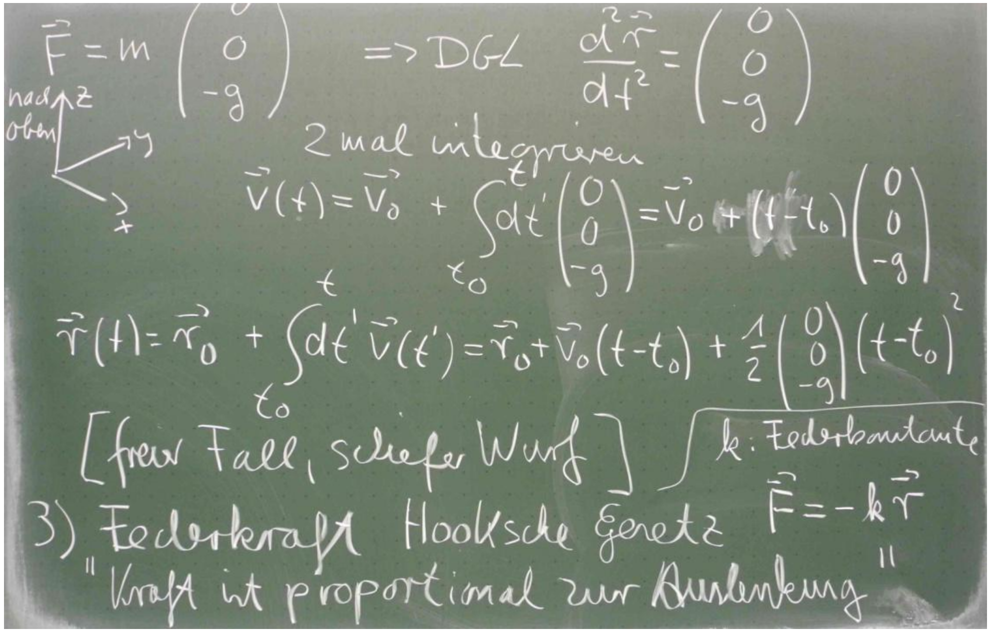
Konkret: $\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \, \vec{v}_0 + \vec{r}_0$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{v}_0 (t - t_0) + \vec{r}_0}$$

[Statik: $\sum \vec{F}_i = 0$]

2) Schwerkraft auf der Erdoberfläche

Konstante Beschleunigung



$\vec{F} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow$ DGL $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

nach oben z

y

x

2 mal integrieren

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} dt' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \vec{v}_0 + (t - t_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

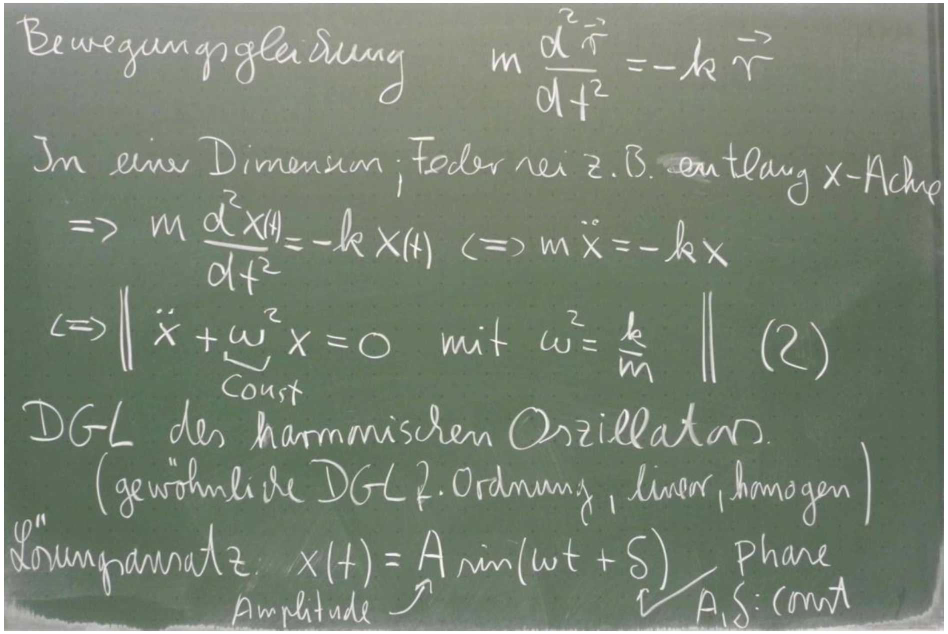
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} dt' \, \vec{v}(t') = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} (t - t_0)^2$$

[freier Fall, schiefer Wurf]

k: Federkonstante

3) Federkraft Hooksche Gesetz $\vec{F} = -k\vec{r}$

"Kraft ist proportional zur Auslenkung"



Bewegungsgleichung $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$

In einer Dimension; Feder sei z.B. entlang x-Achse

$$\Rightarrow m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k\,x(t) \Leftrightarrow m\ddot{x} = -kx$$

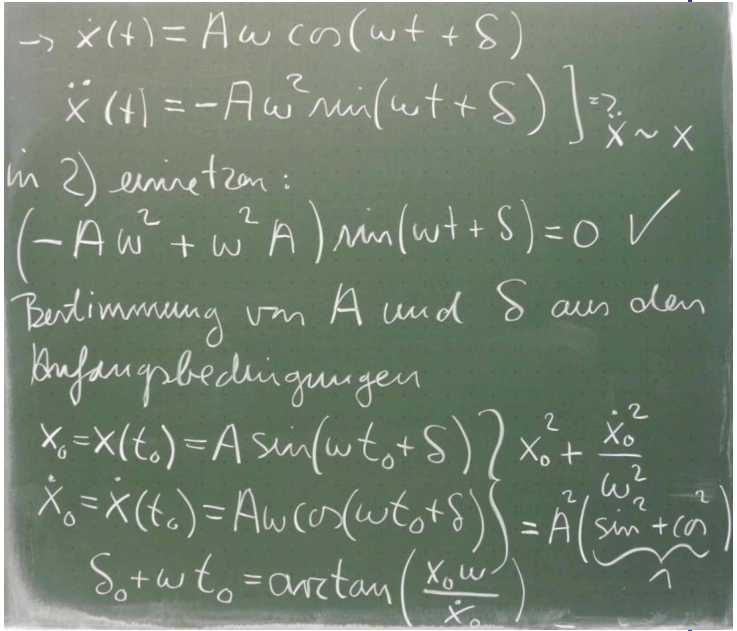
$$\Leftrightarrow \left\| \ddot{x} + \underbrace{\omega^2}_{\text{Const}} x = 0 \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{k}{m} \right\| \quad (2)$$

DGL des harmonischen Oszillators
(gewöhnliche DGL 2. Ordnung, linear, homogen)

„Lösungsansatz": $x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$ Phase

Amplitude

A, δ: const



$$\rightarrow \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

$$\left.\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)\right] \overset{?}{\Rightarrow} \ddot{x} \sim x$$

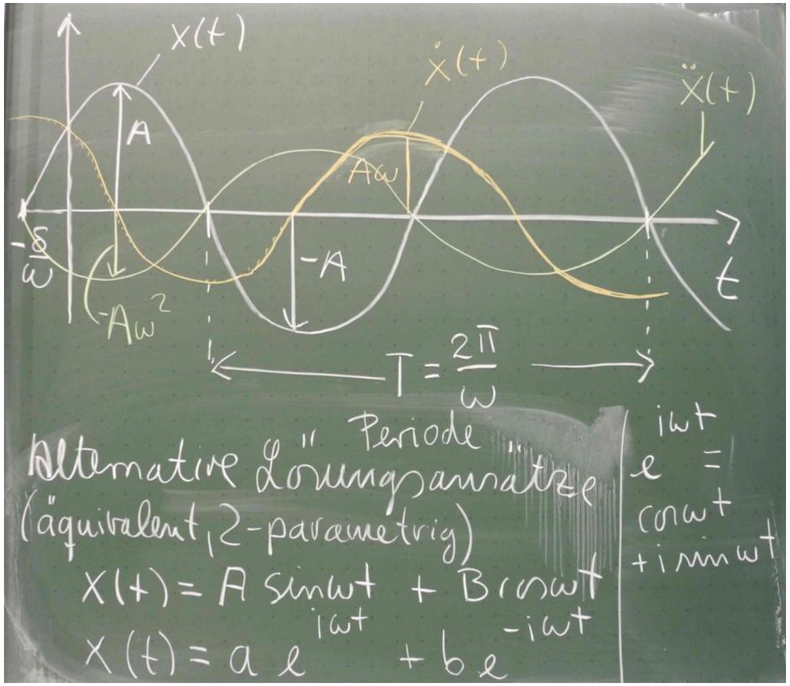
in 2) einsetzen:

$$(-A\omega^2 + \omega^2 A)\sin(\omega t + \delta) = 0 \quad ✓$$

Bestimmung von A und δ aus den Anfangsbedingungen

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x(t_0) = A\sin(\omega t_0 + \delta) \\ \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0) = A\omega\cos(\omega t_0 + \delta) \end{array}\right\} x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} = A^2(\underbrace{\sin^2 + \cos^2}_{1})$$

$$\delta_0 + \omega t_0 = \arctan\left(\frac{x_0\omega}{\dot{x}_0}\right)$$

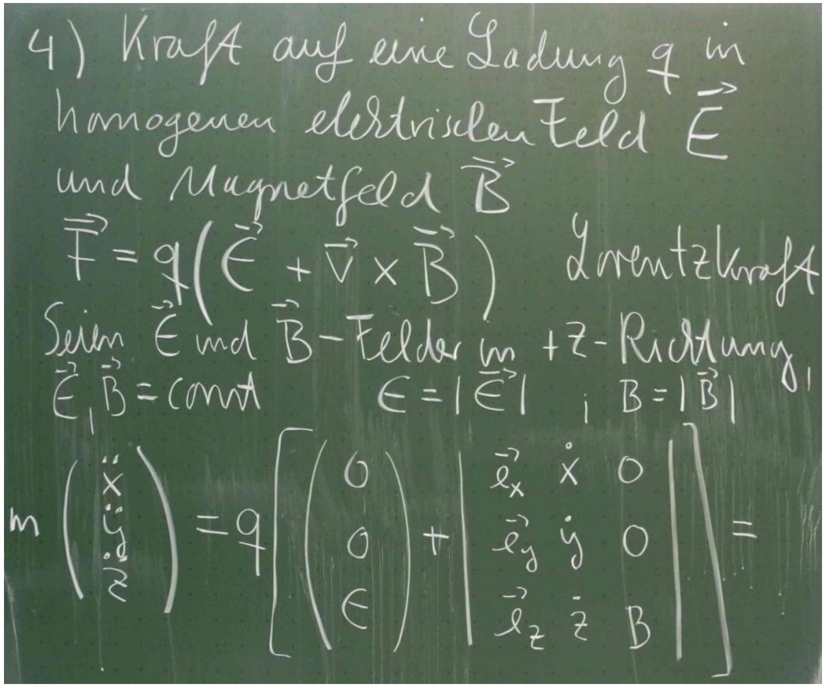


Alternative „Lösungsansätze"
(äquivalent, 2-parametrig)

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$x(t) = a\,e^{i\omega t} + b\,e^{-i\omega t}$$

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

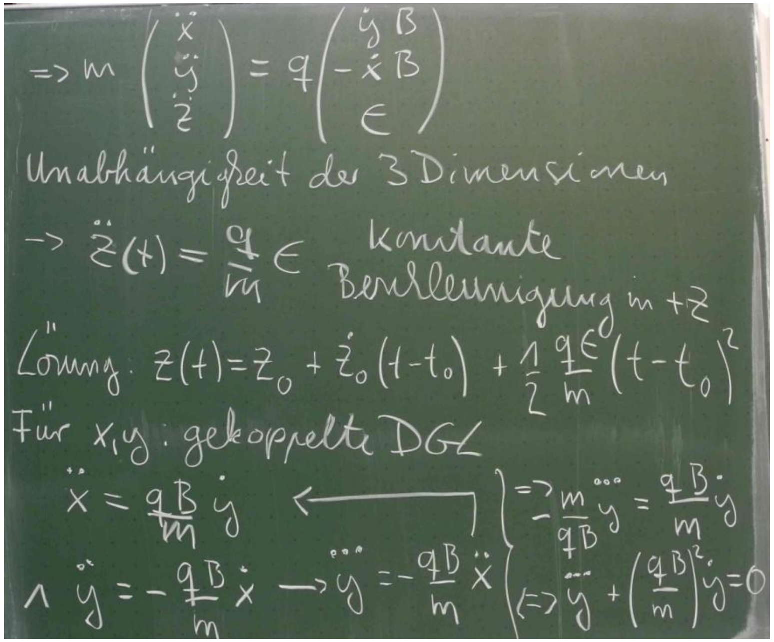


4) Kraft auf eine Ladung q in homogenen elektrischen Feld $\vec{E}$ und Magnetfeld $\vec{B}$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Lorentzkraft}$$

Seien $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Felder in +z-Richtung,
$\vec{E}, \vec{B} = \text{const}$ $E = |\vec{E}|$, $B = |\vec{B}|$

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\left[\begin{pmatrix}0\\0\\E\end{pmatrix} + \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \dot{x} & 0\\ \vec{e}_y & \dot{y} & 0\\ \vec{e}_z & \dot{z} & B\end{vmatrix}\right] =$$



$$\Rightarrow m\begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot y\\ \ddot z\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot y B\\ -\dot x B\\ E\end{pmatrix}$$

Unabhängigkeit der 3 Dimensionen

$\rightarrow \ddot z(t) = \frac{q}{m}E$ konstante Beschleunigung in +z

Lösung: $z(t) = z_0 + \dot z_0 (t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{qE}{m}(t-t_0)^2$

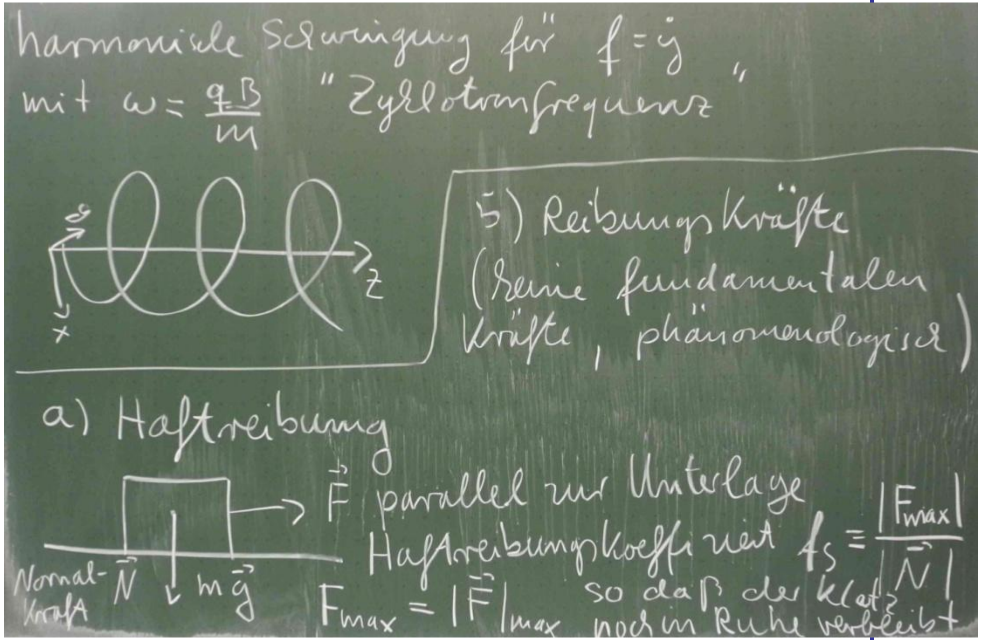
Für x, y: gekoppelte DGL

$\ddot x = \frac{qB}{m}\dot y \longleftarrow$

$\wedge\ \ddot y = -\frac{qB}{m}\dot x \longrightarrow \dddot y = -\frac{qB}{m}\ddot x$

$\Rightarrow -\frac{m}{qB}\dddot y = \frac{qB}{m}\dot y$

$\Leftrightarrow \dddot y + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \dot y = 0$



harmonische Schwingung für $f = \dot y$

mit $\omega = \frac{qB}{m}$ "Zyklotronfrequenz"

5) Reibungskräfte

(keine fundamentalen Kräfte, phänomenologisch)

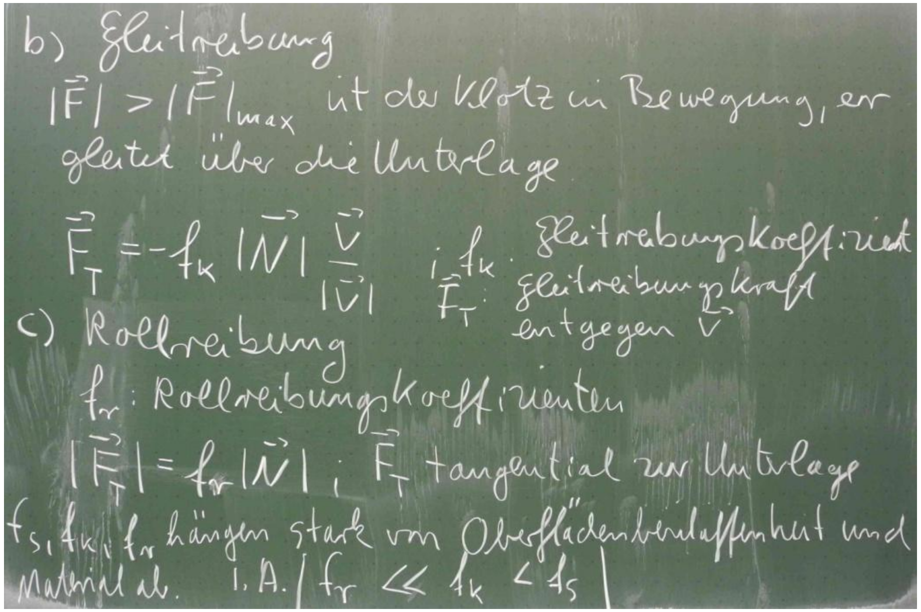
a) Haftreibung

$\vec F$ parallel zur Unterlage

Normal-Kraft $\vec N$ $m\vec g$

Haftreibungskoeffizient $f_s \equiv \frac{|F_{max}|}{|\vec N|}$

$F_{max} = |\vec F|_{max}$ so daß der Klotz noch in Ruhe verbleibt



b) Gleitreibung

$|\vec F| > |\vec F|_{max}$ ist der Klotz in Bewegung, er gleitet über die Unterlage

$\vec F_T = -f_k |\vec N| \frac{\vec v}{|\vec v|}$; f_k: Gleitreibungskoeffizient

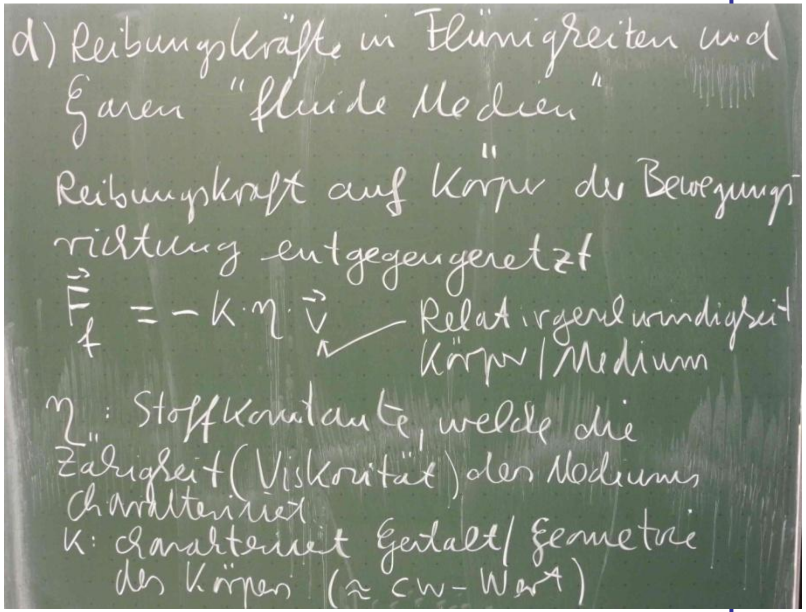
$\vec F_T$: Gleitreibungskraft entgegen $\vec v$

c) Rollreibung

f_r: Rollreibungskoeffizienten

$|\vec F_T| = f_r |\vec N|$; $\vec F_T$ tangential zur Unterlage

f_s, f_k, f_r hängen stark von Oberflächenbeschaffenheit und Material ab. i.A. | $f_r \ll f_k < f_s$ |



d) Reibungskräfte in Flüssigkeiten und Gasen "fluide Medien"

Reibungskraft auf Körper der Bewegungsrichtung entgegengesetzt

$\vec F_f = -K \cdot \eta \cdot \vec v$ Relativgeschwindigkeit Körper / Medium

η: Stoffkonstante, welche die Zähigkeit (Viskosität) des Mediums charakterisiert

K: charakterisiert Gestalt / Geometrie des Körpers (≈ cw-Wert)