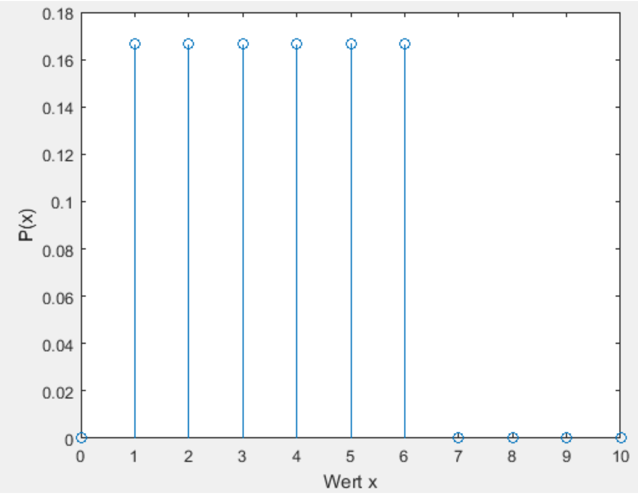
Typische Wahrscheinlichkeitsverteilungen



a) Gleichverteilung z.B. Würfel $P(1) = 1/6$, $P(2) = 1/6$ usw.
Mittelwert = 3,5
Varianz ≈ 2,92

Anmerkung: Für eine kontinuierliche Gleichverteilung zwischen a und b ist die Standardabweichung

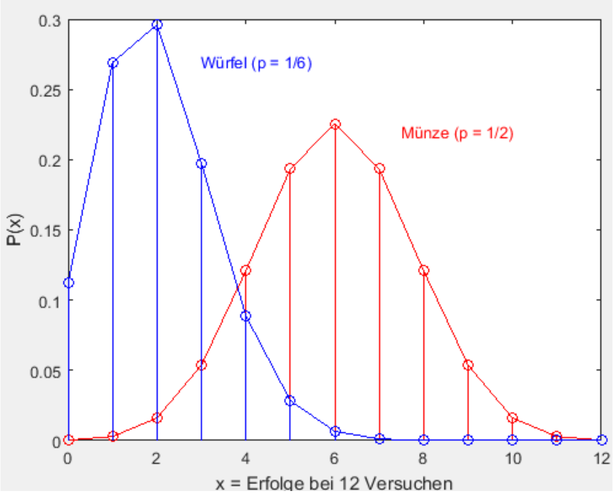
$$\sigma = (b-a)/\sqrt{12}$$

b) Binomialverteilung z.B. Wahrscheinlichkeit, bei N Würfen r-mal $x = 6$ zu würfeln.

$$\boxed{P(r) = \frac{N!}{r!(N-r)!}\, p^r (1-p)^{N-r}}$$

mit $p = P(x)$, der Erfolgswahrscheinlichkeit bei einem Versuch

Mittelwert = Np
Varianz = $Np(1-p)$



Beispiel: Binomialverteilung für eine bestimme Zahl (z.B. 6) und für eine Seite einer Münze bei 12 Würfen.

c) Poisson-Verteilung, Näherung der Binomialverteilung für p → 0 und N → ∞, z.B. radioaktiver Zerfall.

$$\boxed{P(r) = \frac{\mu^r e^{\mu}}{r!}}$$

Mittelwert $\mu = Np$

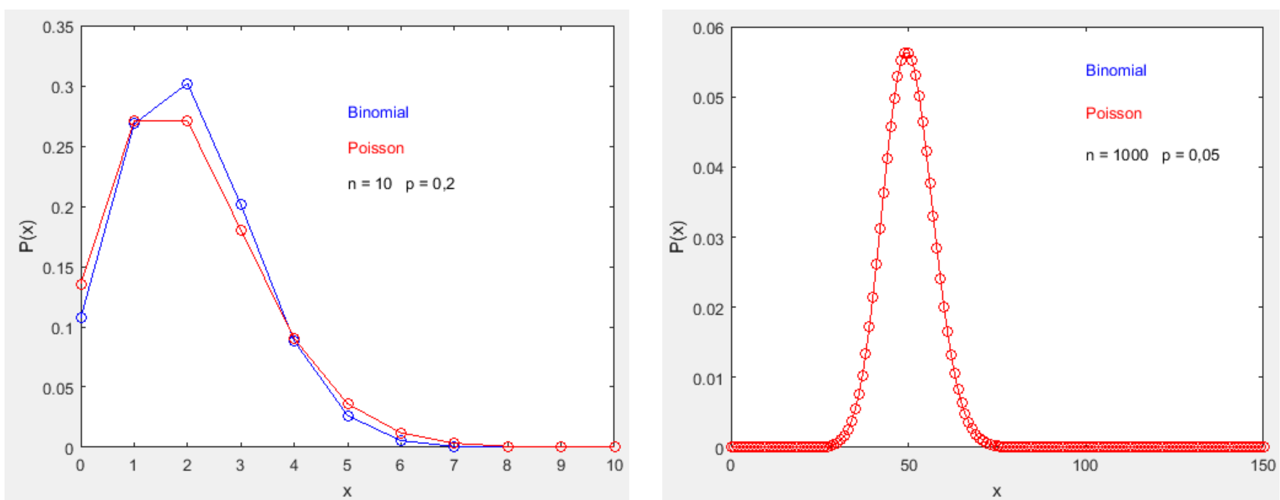
Varianz = μ , d.h. die Standardabweichung ist $\sigma = \sqrt{\mu}$

Beispiel: Zerfall von ^{137}Cs mit einer Halbwertszeit von 27 Jahren (1/e-Zerfallszeit 39 Jahre).

Wahrscheinlichkeit für 1 Sekunde $p = 1/(39 \cdot 3 \cdot 10^7\ \mathrm{s}) = 8 \cdot 10^{-10}\ 1/\mathrm{s}$

aber: z.B. 10^{15} Atomkerne in einer Probe ergeben einen Mittelwert von ca. 10^6 Zerfällen/s.

Die Unsicherheit der Zählrate ist 10^3 Zerfälle/s (relative Unsicherheit 1 Promille).



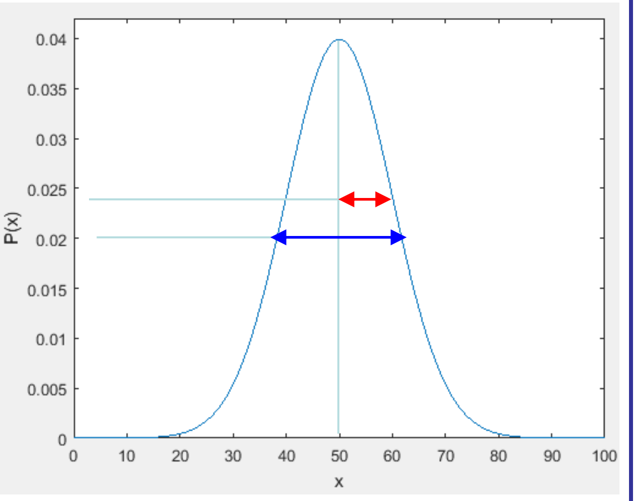
Zwei Beispiele für Binomial- (blau) und Poisson-Verteilung (rot) mit verschiedenen Parametern.
Im rechten Bild sind die rote und blaue Kurve nicht mehr voneinander zu unterscheiden.

d) Normalverteilung (Gauß-Verteilung), viele Beispiele

Besondere Bedeutung aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes: Summe einer großen Zahl identisch Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung, endlichem Erwartungswert und endlicher Varianz nähert sich einer Normalverteilung. Illustration z.B. mit dem Galtonschen Brett.

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}}$$

Mittelwert μ
Varianz σ^2



Normalverteilung: Die Standardabweichung σ (rot) entspricht der halben Breite der Verteilung bei einer Höhe von etwa 60%, genauer $e^{-1/2}$, des Maximums. Die Halbwertsbreite beträgt etwa $2{,}35\cdot\sigma$, genauer $2\cdot(2\cdot\ln 2)^{1/2}\,\sigma$. Das Integral der Normalverteilung von 0 bis x nennt man Fehlerfunktion, *error function* erf(x). Zwischen den Grenzen $\pm\sigma$ liegen etwa 68% der Fläche unter der Kurve.

Stichproben

Mittelwert und Varianz der Verteilung

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x)dx \qquad \sigma^2 = \int (x-\mu)^2 \cdot P(x)dx$$

Durchführung einer Messreihe, Mittelwert und Varianz der Stichprobe:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

ist nur für große n richtig, da μ nicht der Mittelwert der Messung ist, sondern der wahre Mittelwert, der nicht bekannt ist. Für kleine n gilt (ohne Beweis, s. z.B. Demtröder, Experimentalphysik 1)

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2$$

Aufgrund der Unsicherheit des Mittelwerts ist die Varianz hier etwas größer als im Ausdruck mit μ.

Unabhängig von der Zahl der Messungen bleibt die Breite der Verteilung gleich, aber der Mittelwert sollte genauer werden. Was ist die Varianz des Mittelwerts?

$$(\mu-\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu - x_i)$$

Doppelsumme geht für große n gegen 0

$$(\mu-\bar{x})^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mu - x_i)\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(\mu - x_i)^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mu - x_j)(\mu - x_i) \approx \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(\mu - x_i)^2$$

$$\sigma_m = \sqrt{(\mu-\bar{x})^2} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2} \boxed{= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

nennt man mittleren Fehler des Mittelwerts. Während die Standardabweichung σ der Verteilung gleich bleibt, verkleinert sich die Standardabweichung σ_m des Mittelwerts durch wiederholte Messungen.

Anmerkung:

Meist wird angenommen, das arithmetische Mittel sei der Mittelwert einer Stichprobe, der sich bei großer Zahl n dem Erwartungswert annähert. Begründung: Minimierung der Fehlerquadratsumme, Summe der Differenzen $(x_i-\mu)$ ist null.

$$S = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

$$\frac{dS}{d\mu} = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Das ist aber nicht immer sinnvoll. Beispiel:

i) Durchschnittsgeschwindigkeit von 2 gleichen Zeitintervallen T:
(arithmetisches Mittel)

$$\bar{v} = \frac{v_1 T + v_2 T}{2T} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

ii) Durchschnittsgeschwindigkeit von 2 gleichen Strecken S:
(harmonisches Mittel, arithmetisches Mittel der Kehrwerte)

$$\bar{v} = \frac{2S}{S/v_1 + S/v_2} = \frac{2}{1/v_1 + 1/v_2}$$

Fehlerfortpflanzung

ist die Berechnung des Fehlers eines Werts, der eine Funktion mehrerer Größen mit Fehlern ist, z.B. Geschwindigkeit $v(s,t) = s / t$, wobei die Messung von Weg und Zeit fehlerbehaftet ist.

$$u = f(x,y) \qquad u - \bar{u} \approx (x-\bar{x})\frac{\partial f}{\partial x} + (y-\bar{y})\frac{\partial f}{\partial y}$$

d.h. u um den Mittelwert entwickelt. Zur Berechnung der Varianz wird dieser Ausdruck quadriert

$$(u-\bar{u})^2 \approx (x-\bar{x})^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + (y-\bar{y})^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2(x-\bar{x})(y-\bar{y})\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Für **unabhängige Fehler** (Kovarianz 0, letzter Term fällt weg) ergibt sich das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\boxed{\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\sigma_y^2}$$

Einfache Beispiele:

$$u = x \pm y \qquad \sigma_u^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \qquad \sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Addition und Subtraktion von x und y: Absolute Fehler quadratisch addiert

$$u = x \cdot y \qquad \sigma_u^2 = y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2 \qquad \frac{\sigma_u}{u} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

$$u = \frac{x}{y} \qquad \sigma_u^2 = \frac{1}{y^2}\sigma_x^2 + \frac{x^2}{y^4}\sigma_y^2 \qquad \frac{\sigma_u}{u} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

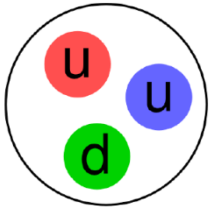
Multiplikation und Division von x und y: relative Fehler quadratisch addiert

2 Mechanik

2.1 Mechanik von Massepunkten (Punktmassen)

Für viele Anwendungen kann man sich die Masse eines Körpers in einem Punkt vereinigt denken. Damit kann man alles beschreiben, was nicht von der Form oder der inneren Struktur des Körpers abhängt z.B. seine Bewegung im Raum (Bewegung der Erde um die Sonne, Flugbahn eines Fußballs, Bewegung eines Protons in einem Beschleuniger), nicht aber Rotation oder Verformung des Körpers.

2.1.1 Kinematik von Massepunkten



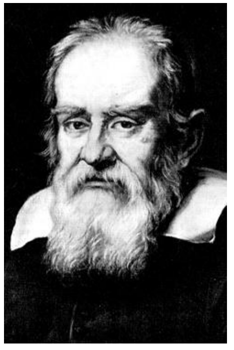
Die Kinematik beschreibt die Bewegung von Körpern (Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung), nicht aber die Ursache der Bewegung (Kräfte).

Der **Ort** eines Teilchens (die Position im Raum) ist i.d.R. zeitabhängig und wird durch einen Vektor dargestellt, z.B. in kartesischen Koordinaten:

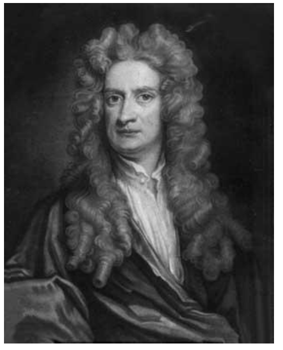
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\cdot\vec{e}_x + y(t)\cdot\vec{e}_y + z(t)\cdot\vec{e}_z$$

Auch **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** sind gerichtete Größen. Sie werden durch Vektoren dargestellt und können zeitabhängig sein:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$



Galileo Galilei
1564-1642



Isaac Newton
1642-1726

Der Betrag der (momentanen) Geschwindigkeit ist $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$

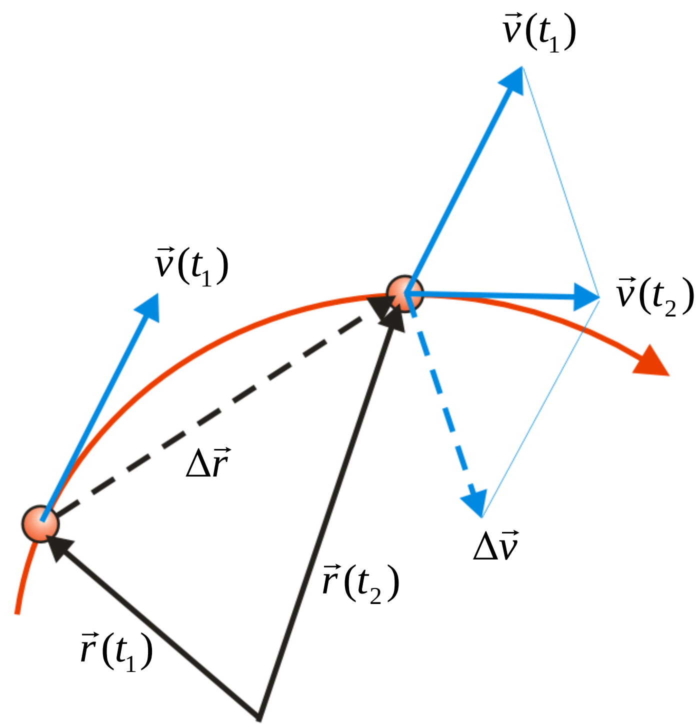
Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Änderung des Orts, die Beschleunigung ist die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit.

Mittlere Geschwindigkeit $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

Mittlere Beschleunigung $\bar{\vec{a}} = \dfrac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

Momentane Beschleunigung $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$



Die Änderungen von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung addieren sich vektoriell zu den jeweiligen Größen vor der Änderung.

Beispiel: Fahrt von DESY zur Hamburger Innenstadt,
Mittlere Geschwindigkeit 8 km / 0,5 h = 16 km/h,
Momentangeschwindigkeit (an der falschen Stelle) 41 km/h.

Oft verläuft eine Bewegung in eine Richtung, die in Folgenden als *x*-Koordinate gewählt ist. Da die Werte der *y*- und *z*-Koordinate sich dann nicht ändern, kann man sie weglassen und statt den Vektoren Skalare für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung verwenden.

Zwei einfache Formen der Bewegungen:

1) Geradlinig gleichförmig: Geschwindigkeit konstant, Beschleunigung 0

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0 \qquad a(t) = 0$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 \qquad v(t) = \int_0^t a(\hat{t}) \cdot d\hat{t} + v_0 = v_0$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = 0 \qquad x(t) = \int_0^t v(\hat{t}) \cdot d\hat{t} + x_0 = v_0 \cdot t + x_0$$

Beispiel: Schlitten auf einer Luftkisssenbahn ohne Antrieb (Reibung und Luftwiderstand vernachlässigt)

2) Geradlinig und gleichmäßig beschleunigt: Beschleunigung konstant

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \qquad a(t) = a_0$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = a_0 \cdot t + v_0 \qquad v(t) = \int_0^t a(\hat{t}) \cdot d\hat{t} + v_0 = a_0 \cdot t + v_0$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = a_0 \qquad x(t) = \int_0^t v(\hat{t}) \cdot d\hat{t} + x_0 = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Beispiel: Freier Fall aufgrund der Gravitationsbeschleunigung der Erde (Luftwiderstand vernachlässigt), hängt offenbar nicht von Eigenschaften (z.B. Masse) des fallenden Körpers ab ("alle Körper fallen gleich schnell"). Dies wurde erst im 16. Jahrhundert erkannt (Giovanni Benedetti, Galileo Galilei) und 1586 in Leiden von Simon Stevin (nicht Galilei) demonstriert. An der Erdoberfläche beträgt die Fallbeschleunigung $a = g \approx 9{,}81$ m/s^2. Genau genommen hängt sie vom Abstand vom Erdmittelpunkt ab, hinzu kommt die Zentrifugalbeschleunigung aufgrund der Erdrotation. Die Fallbeschleunigung variiert an der Erdoberfläche um 0,5% (kleinster Wert 9,76 m/s^2 auf dem Berg Huascarán in Peru).