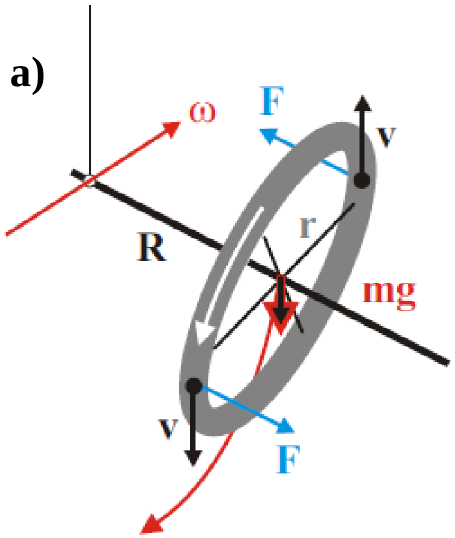
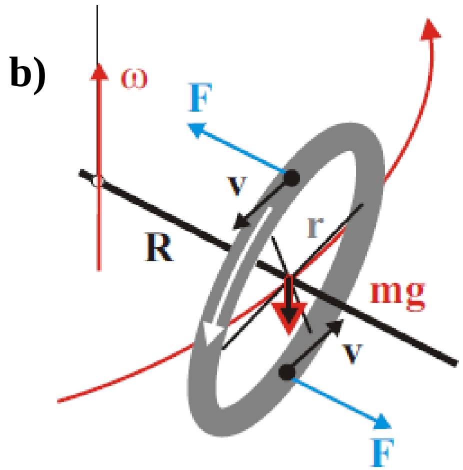
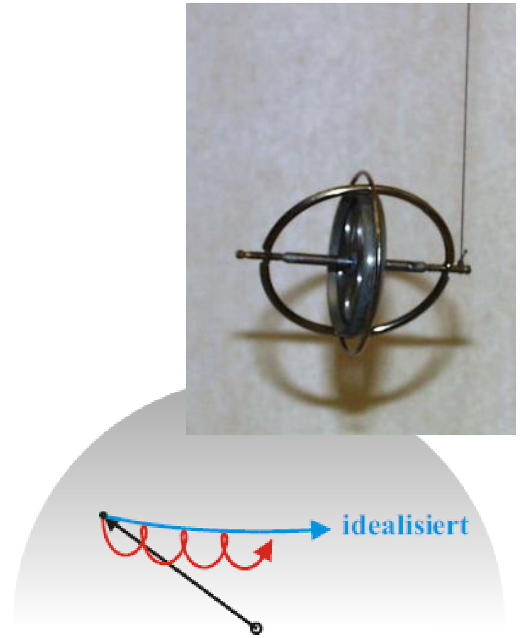
Experiment und Anmerkungen zur Präzession des Kreisels







Die Achse des Kreisels (hier ein Kreisring) hänge links an einem Fadel. Statt aufgrund des Drehmoment Abstand R x mg zu fallen, weicht der Kreisel in Richtung des Drehmomentvektors, der sich aus dem Kreuzprodukt ergibt, aus. Dies ist zwar mathematisch aufgrund der Eigenschaft des Kreuzprodukts korrekt, erklärt die Präzessionsbewegung nicht "wirklich" und kann auch nicht die volle Wahrheit sein. Wenn z.B. der Kreisel sehr langsam dreht (eine Umdrehung pro Minute), ist es nicht mehr plausibel, weshalb er nicht fällt. Hier ein alternativer Erklärungsversuch (steht nicht in den gängigen Lehrbüchern):

a) Wenn das rechte Ende der Achse losgelassen wird, beginnt der Kreisel zu fallen. Das entspricht einer Kreisbewegung um die in a) gezeigte ω-Achse. Aufgrund der Rotation des Kreisels bewegt sich aber ein Teil der Kreiselmasse schneller als der Schwerpunkt, ein anderer Teil langsamer. Das Resultat sind die blau gezeichneten Kraftpfeile (hier kann man im mitbewegten System mit der Corioliskraft argumentieren – denken Sie an die Übungsaufgabe mit dem Astronauten, der in einer ringförmigen Raumstation joggt). Erst die Fallbewegung setzt also die Präzessionsbewegung in Gang, aber wenn der Kreisel sehr schnell rotiert, fällt er nur wenig, und es sieht so aus, als ob er sofort horizontal ausweicht.

b) Wenn der Kreisel präzessiert, muss es ein Drehmoment geben, das ihn am Fallen hindert. Hier kann man ähnlich argumentieren wie vorhin. Diesmal ist die Drehung in der horizontalen Ebene und die in b) gezeigten Massenanteile bewegen sich schneller bzw. langsamer als der Schwerpunkt, so dass die blau eingezeichneten Kräfte entstehen. Die Berechnung des so entstehenden Drehmoments und Integration über den gesamten Ring zeigt, dass das Drehmoment $R \times mg$ aufgehoben wird, wenn ω die Präzessionsfrequenz ist.

Die Erde als Kreisel

Rotationsenergie der Erde (homogene Kugel, R = 6370 km, $M = 6{\cdot}10^{24}$ kg, T = 1 Tag)

$$E = \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}M\cdot R^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{6\cdot10^{24}\ \text{kg}\cdot\left(6{,}37\cdot10^6\ \text{m}\right)^2\cdot 39{,}5}{5\cdot\left(24\cdot3600\right)^2\ \text{s}^2}$$

$$E = 2{,}6\cdot10^{29}\ \text{J}$$

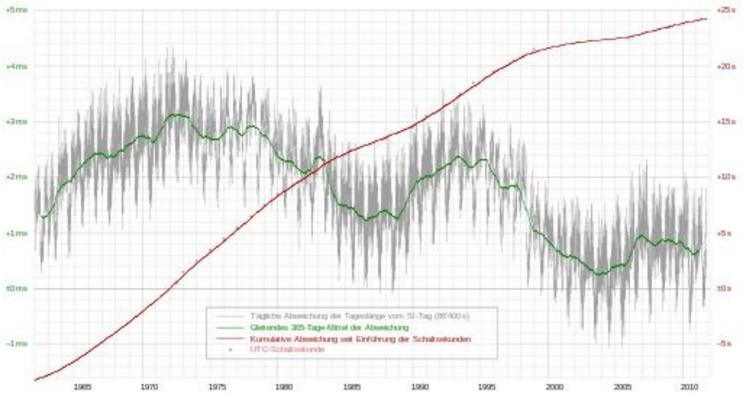
$$\frac{dE}{d\omega} = I\cdot\omega = 2\frac{E}{\omega} \qquad \frac{dE}{E} = 2\frac{d\omega}{\omega} = -1.1\cdot10^{-12}$$ mittlere Abnahme pro Jahr

$$dE = -1.1\cdot10^{-12}\cdot 2.6\cdot10^{29}\ \text{J} = -2.9\cdot10^{17}\ \text{J}$$ pro Jahr (Weltenergiebedarf $5{\cdot}10^{20}$ J im Jahr 2010)

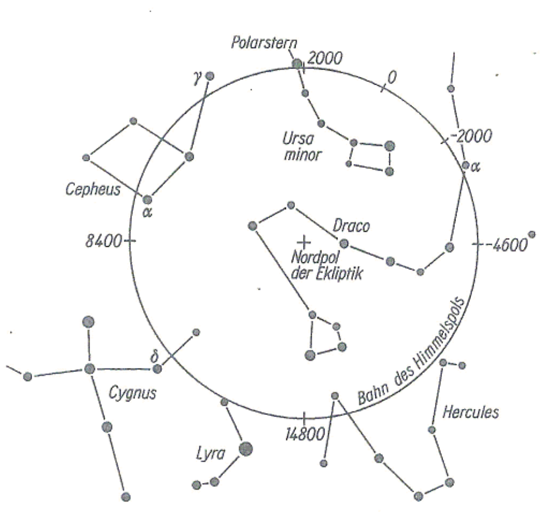
Die Rechnung ist sehr ungenau: Die Erde ist keine homogene Kugel, sondern die Dichte nimmt zum Erdmittelpunkt zu (d.h. das Trägheitsmoment und die Rotationsenergie ist kleiner). Die Erdrotation ist großen Schwankungen unterworfen. Wir beobachten nur die Rotation der Erdkruste, die sich gegen das Erdinnere verschieben kann. Neben der Abnahme aufgrund aufgrund der Gezeitenreibung gibt es jahreszeitliche und längerfristige Umverteilungen der Erdmasse (Jetstream, Vegetation, Eismassen ...).

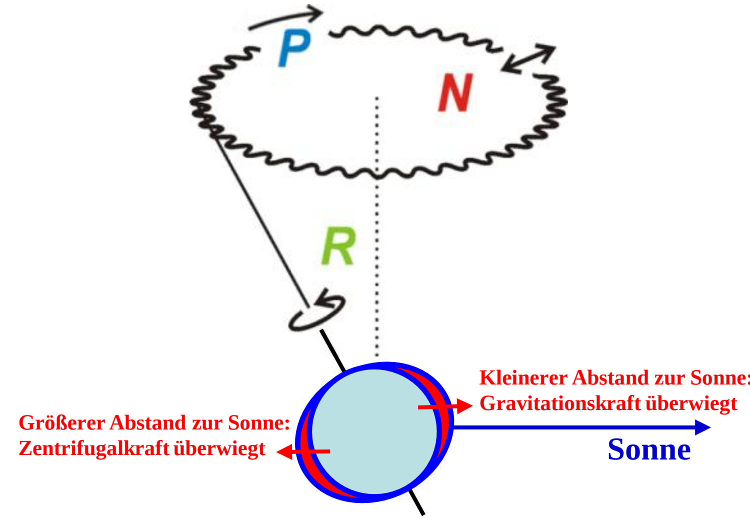
Aufgrund der Abplattung der Erde und der Neigung der Erdachse gegen die Ekliptik übt die Sonne ein Drehmoment auf die Erde aus. Die Periode der Präzessionsbewegung beträgt ca. 26000 Jahre (d.h. die Erdachse zeigt nicht immer zum Polarstern).

Hinzu kommt einen Nutationsbewegung und weitere Effekte: das Drehmoment der Sonne ist nicht konstant, auch Mond und Planeten üben Drehmomente aus. Die geografischen Pole wandern mit einer Periode von 305 Tagen ungefähr entlang eines Kreises von 15 m Durchmesser.



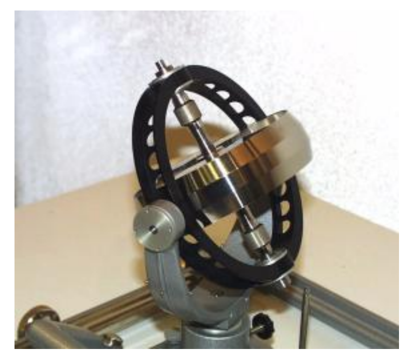
Präzession der Erdachse





Stellung der Erdachse in Winterhalbjahr der Nordhalbkugel. Für die von der Kugelgestalt abweichenden äquatorialen "Wülste" besteht ein Ungleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Zentripetalkraft (Gravitation) $\rightarrow$ Drehmoment $\rightarrow$ Präzession.

Experimente mit dem Kreisel



Der symmetrische Kreisel behält seine Richtung im Raum bei (Anwendung: Kurskreisel für die Navigation, insbesondere bei Flugzeugen). Wenn der Kreisel gestört wird, führt er eine Nutationsbewegung aus. Drehimpulsachse, momentane Drehachse und Figurenachse zeigen dann nicht mehr in dieselbe Richtung, sondern bewegen sich umeinander, wobei ohne äußeres Drehmoment die Drehimpulsachse konstant bleibt. Die Bewegung der momentanen Drehachse wird mit einer "Maxwell-Scheibe" sichtbar gemacht, die mehrere Sektoren verschiedener Farbe aufweist. Das Bild der Scheibe verschwimmt bis auf einen Punkt, um sich den die Scheibe dreht. Bei konstanter Drehachse wirkt dieser Punkt grau, bei wandernder Drehachse erscheint der Punkt abwechselnd in den Farben der Sektoren.

Ein Gewicht an einem Ende der Drehachse bewirkt eine langsame Präzessionsbewegung.

Ein Kreisel mit unsymmetrischer Massenverteilung lässt sich durch eine leichte Berührung erheblich stören und führt dann eine erratische Bewegung aus.

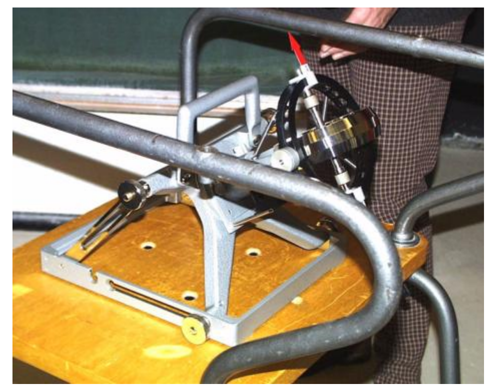
Kreiselinstrumente eines Flugzeugs

Standardinstrumente eines Flugzeugs, drei davon sind Kreiselinstrumente:

- Künstlicher Horizont (Mitte oben) zeigt die Fluglage relativ zum Horizont.
- Kurskreisel (Mitte unten) zeigt den Kurs, nachdem er einmal auf die richtige Richtung eingestellt wurde (Drehknopf links).
- Wendezeiger (links unten) zeigt die Kursänderung beim Kurvenflug. Die mit R und L markierten Striche entsprechen einem Vollkreis in 2 Minuten.

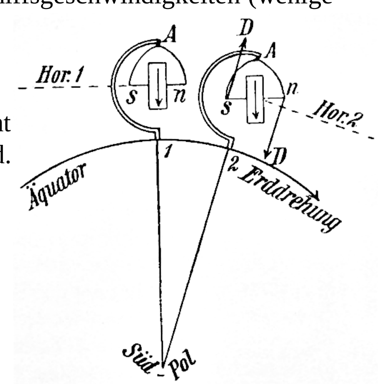
Die übrigen Instrumente (ohne Kreisel) sind der Fahrtmesser (links oben, Geschwindigkeit in Knoten), Höhenmesser (rechts oben, der große/kleine Zeiger gibt die Höhe in 100/1000 Fuß an) und das Variometer (rechts unten, Höhenänderung in 100 Fuß/Minute).

Kreiselkompass in Schiffen



Der Kreiselkompass, wie er üblicherweise in Schiffen verwendet wird, geht auf H. Anschütz-Kaempfe (1972 – 1931) zurück, wobei auch Ideen seines Segelkameraden A. Einstein (1879 – 1955) einflossen. Des handelt sich um einen "gefesselten" Kreisel, bei dem sich die Achse nur horizontal bewegen kann. Bei der Rotation der Erde strebt der Kreisel danach, seine Achse im Raum beizubehalten, was ein Drehmoment zur Folge hat. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn die Achse in Nord-Süd-Richtung ausgerichtet ist. Wird die horizontale Bewegung der Achse gedämpft, richtet sich der Kreise also nach einiger Zeit in Nord-Süd-Richtung aus (Experiment mit dem gefesselten Kreisel auf einem Drehstuhl).

Bewegt sich ein Schiff entlang eines Meridians nach Norden oder Süden, entsteht aus dem oben genannten Grund wieder ein Drehmoment und führt bei typischen Schiffsgeschwindigkeiten (wenige 10 kn) zur Abweichungen bis zu 1 Grad (sog. Fahrtfehler).



Anderen Fehlern durch äußere Einflüsse (z.B. Seegang) wird durch eine Anordnung entgegengewirkt, bei der die Achsen zweier senkrecht zueinander angeordneter Kreisel elastisch miteinander verbunden sind. Beide befinden sich in einer Kugel, die frei beweglich in einem Ölbad schwimmt. Die Kompassanzeige wird elektrisch auf verschiedene Stellen im Schiff (Steuerstand, Brücke etc.) übertragen.

Trägheitstensor, Auffinden der Hauptträgheitsachsen

allgemein: $\vec{L} = \underline{I}\,\vec{\omega}$

$\underline{I}$: Trägheitstensor (3x3-Matrix)

in Komponenten $i=1,2,3$ (x,y,z): $L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\,\omega_j$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

ω_x beschreibt Rotation um x-Achse
ω_y — y
ω_z — z

$\underline{I}$ ist symmetrisch, und reellwertig.

$\underline{I} = \underline{I}^T$ ← transponieren, d.h., Zeilen + Spalten vertauscht

In Komponenten: $I_{ij} = I_{ji}$

Hauptträgheitsachsen sind diejenigen 3 Achsen, für die $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

Auffinden der Hauptträgheitsachsen

$$\underline{I}\,\vec{\omega}_k \overset{!}{=} I_{D_{kk}} \cdot \vec{\omega}_k \qquad (X) \quad \text{für } k=a,b,c$$

mit $\underline{I}_D = \mathrm{diag}(I_a, I_b, I_c) = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0\\ 0 & I_b & 0\\ 0 & 0 & I_c\end{pmatrix}$

Die 3 Gleichungen definieren ein sog. Eigenwertproblem.

Die diagonalen Trägheitsmomente I_a, I_b, I_c heißen Eigenwerte. Die Lösungen von (X), $\vec{\omega}_a, \vec{\omega}_b, \vec{\omega}_c$ heißen Eigenvektoren. Dies sind die Hauptträgheitsachsen.

Da $\underline{I}$ symmetrisch, sind $\vec{\omega}_{a,b,c}$ orthogonal zueinander
$\vec{\omega}_a \cdot \vec{\omega}_b = \vec{\omega}_a \cdot \vec{\omega}_c = \vec{\omega}_b \cdot \vec{\omega}_c = 0$, und die Eigenwerte $I_a, I_b, I_c \in \mathbb{R}$

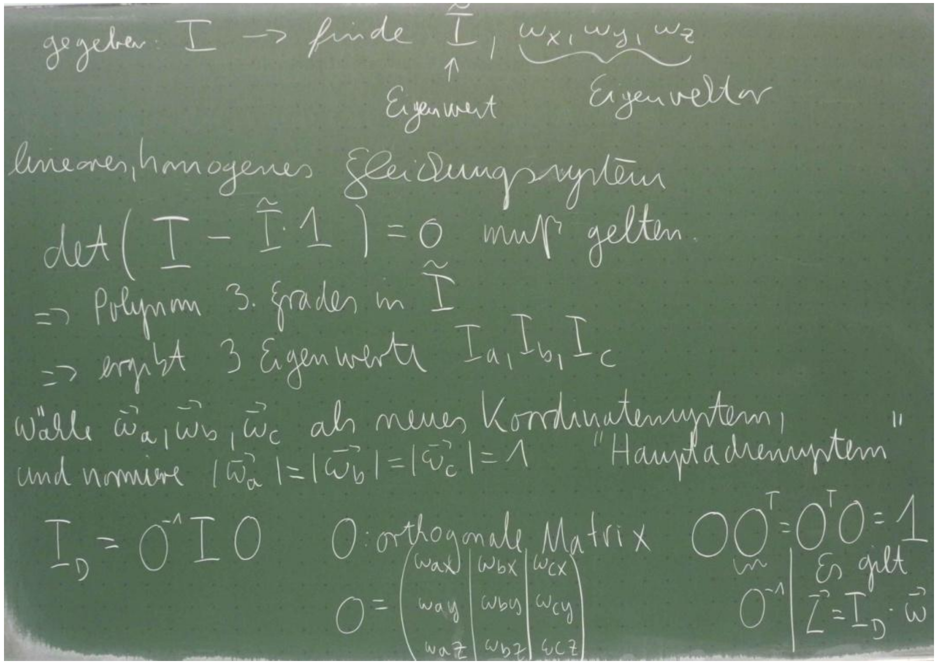
Aufgabe (X): $(\underline{I} - \underline{I}_D)\,\vec{\omega} = 0$ (Index k weggelassen)

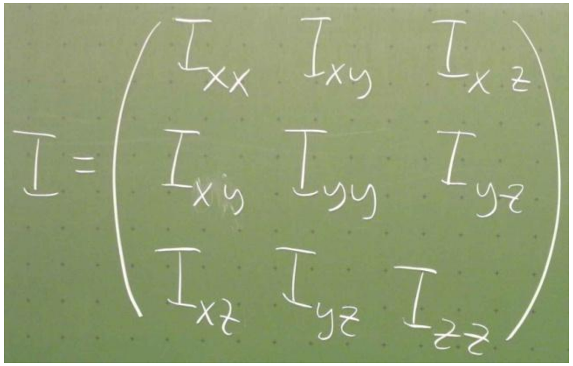
in Komponenten:

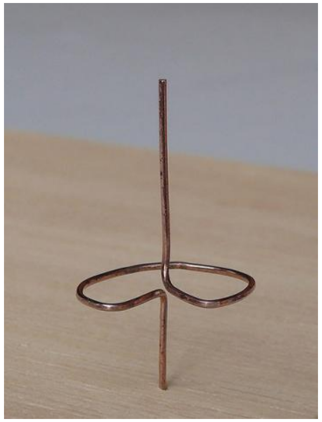
$$\begin{pmatrix} I_{xx}-\tilde{I} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{xy} & I_{yy}-\tilde{I} & I_{yz}\\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz}-\tilde{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Trägheitsmoment: $\underline{I}_D = \tilde{I} \cdot \mathbb{1}$

$\underline{I}_D$: Matrix; $\mathbb{1}$: Einheitsmatrix







Sakai-Kreisel (nach Takao Sakai 1986), aus einer Büroklammer geformt. Übungsaufgabe: Wie groß muss der Öffnungswinkel zwischen den radialen Schenkeln sein?