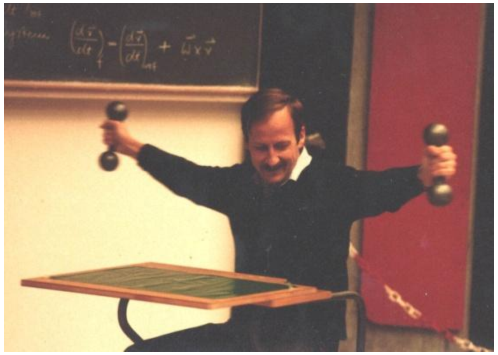
Vergleich zwischen Translation und Rotation

Es gibt eine Ähnlichkeit zwischen den Ausdrücken für lineare Bewegungen und Drehbewegungen, wobei z.B. das Drehmoment analog zur Kraft, das Trägheitsmoment analog zur Masse und der Drehimpuls analog zum Impuls auftritt.

Ort	x [m]	**Winkel**	φ [rad]
Geschwindigkeit	$\vec{v}$ [m/s]	**Winkelgeschwindigkeit**	$\vec{\omega}$ [rad/s]
Beschleunigung	$\vec{a}$ [m/s^2]	**Winkelbeschleunigung**	$\dot{\vec{\omega}}$ [rad/s^2]
Masse	m [kg]	**Trägheitsmoment**	I [kg m^2]
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$ [kg m/s]	**Drehimpuls**	$\vec{L} = I\vec{\omega}$ [kg m^2/s]
kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ [kg m^2/s^2]	**Rotationsenergie**	$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$ [kg m^2/s^2]
Kraft	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\vec{a}$ [kg m/s^2]	**Drehmoment**	$\vec{D} = \dot{\vec{L}} = I\dot{\vec{\omega}}$ [kg m^2/s^2]
lin. Schwingung: Rückstellkraft	$F = -k \cdot x$	**Drehschwingung: Rücktreibendes Drehmoment**	$D = -D_r \cdot \varphi$
Schwingungsdauer	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	**Schwingungsdauer**	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D_r}}$

Drehstuhlversuch

Person mit Hanteln auf einen drehbaren Stuhl. Arme ausgestreckt: Trägheitsmoment groß, Winkelgeschwindigkeit klein – und umgekehrt.



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{I_2}{I_1} \qquad \frac{E_{rot1}}{E_{rot2}} = \frac{I_1\omega_1^2}{I_2\omega_2^2} = \frac{I_2}{I_1}$$

z.B. Trägheitsmoment halbiert $\rightarrow$ ω verdoppelt, Energie verdoppelt. Die Arme der Person leisten Arbeit, und zwar (1) gegen die Zentrifugalkraft und (2) in Richtung der Bewegung, weil sich die Hanteln auf einer elliptischen Bahn befinden (Kraft nicht senkrecht zur Bahn)

Trägheitsmomente für verschiedene Körper (Radius R, Höhe H, Dichte ρ, Symmetrieachse z)

Dünnwandiger Hohlzylinder (Rotation um z): $I_z = \int_V r_\perp^2 dm \approx M \cdot R^2$

Vollzylinder (Rotation um z): $$I_z = \int_V r_\perp^2 dm = \rho \cdot \int_V r_\perp^2 \cdot dV = \rho \cdot \int_{r_\perp=0}^{R} r_\perp^2 \cdot 2\pi \cdot r_\perp \cdot H \cdot dr_\perp = \frac{\pi}{2} \rho \cdot H \cdot R^4 = \frac{1}{2} M \cdot R^2$$

Vollkugel (Achse durch den Mittelpunkt): $I_z = \frac{2}{5} M \cdot R^2$

Dünner Zylinderstab entlang der z-Achse: (Rotation um x oder y)* $I_{x,y} = \frac{1}{12} M \cdot H^2$

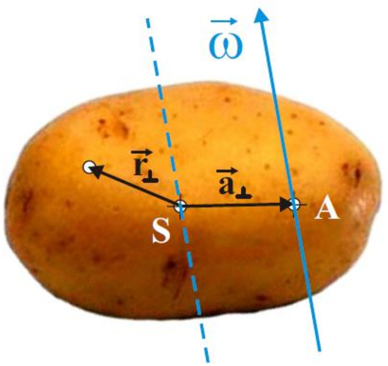
Dünne Scheibe in der x-y-Ebene: (Rotation um x oder y)* $I_{x,y} = \frac{1}{4} M \cdot R^2$

Das Trägheitsmoment hängt von der Lage und Richtung der Drehachse ab.

* bei Rotation um z : $I_z = \frac{1}{2} M \cdot R^2$ (vgl. Vollzylinder)

Der Steinersche Satz (Jakob Steiner 1796 – 1863)

Berechnung des Trägheitsmoments, wenn die die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt S geht, sondern durch einen Punkt A mit senkrechtem Abstand $a_\perp$ zur Drehachse:



Achse durch S: $I_S = \int_V r_\perp^2 \cdot dm$

Achse durch A: $I_A = \int_V (\vec{r}_\perp - \vec{a}_\perp)^2 \cdot dm = \int_V r_\perp^2 \cdot dm + a_\perp^2 \cdot \int_V dm - 2\vec{a}_\perp \int_V \vec{r}_\perp \cdot dm$

Das Integral beschreibt den Ortsvektor des Schwerpunkts. Er ist null, weil der Schwerpunkt hier der Nullpunkt des Koordinatensystems ist.

$$\boxed{I_A = I_S + a_\perp^2 \cdot M}$$

Satz von Steiner: Trägheitsmoment für den Fall der Drehachse durch S plus Trägheitsmoment der Gesamtmasse M im senkrechten Abstand $a_\perp$

Beispiel: Rollender zylindrischer Körper auf einer schiefen Ebene, Drehachse im Berührungspunkt

Rollstrecke *s*, Höhenunterschied *h*, Masse *M*, Radius *R*
Potenzielle Energie = kinetische Energie + Rotationsenergie

$$M \cdot g \cdot h = M \cdot g \cdot s \cdot \sin\theta = \frac{M}{2} v^2 + \frac{I_S}{2}\omega^2 \underset{\omega = \frac{v}{R}}{=} \frac{M}{2} v^2 \cdot \left(1 + \frac{I_S}{MR^2}\right)$$

$$v^2 = \frac{2g \cdot s \cdot \sin\theta}{1 + I_S / \left(MR^2\right)}$$

$$\frac{d}{dt} v^2 = 2v \cdot a = \frac{2g \cdot v \cdot \sin\theta}{1 + I_S / \left(MR^2\right)} \qquad \boxed{a = \frac{g \cdot \sin\theta}{1 + I_S / MR^2}}$$

Der Hohlzylinder rollt am langsamsten.

Das Reifenpendel schwingt um den Punkt am oberen Rand. Die Nabe kann entweder festgestellt oder lose sein.

Beispiel: Physikalisches Pendel mit Trägheitsmoment *I*

Pendellänge *d*, Höhenunterschied *h*, Masse *M*
Potenzielle Energie = kinetische Energie + Rotationsenergie

$$M \cdot g \cdot h = M \cdot g \cdot d \cdot (1 - \cos\theta) \approx M \cdot g \cdot d \cdot \frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} M \cdot g \cdot d \cdot \theta^2 + \frac{1}{2} I \cdot \dot{\theta}^2 = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} M \cdot g \cdot d \cdot 2\theta \cdot \dot{\theta} + \frac{1}{2} I \cdot 2\dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{M \cdot g \cdot d}{I}\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{M \cdot g \cdot d}{I} \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M \cdot g \cdot d}}}$$

Das Trägheitsmoment *I* bezieht sich auf den Drehpunkt des Pendels!

z.B. Reifenpendel 1) fest $I_1 = M \cdot R^2 + M \cdot d^2 = 2M \cdot R^2 \qquad (d = R)$

2) lose $I_2 = M \cdot R^2$

3.3 Der Kreisel

Ein **Kreisel** ist ein rotierender starrer Körper, dessen Drehachse in einem Punkt gelagert ist, d.h. ihre Richtung kann sich ändern. Typische Anwendungen:
- Kinderspielzeug (vor der Einführung der Smartphones)
- Navigationsinstrument (Kompass, künstlicher Horizont etc.)

Bisher wurde die Rotation von symmetrisch geformten Körpern (Kugel, Zylinder...) um eine ihrer Symmetrieachsen betrachtet. Die Rotation um solche sog. "**Hauptachsen**" führt zu einer besonders einfachen Beziehung zwischen Drehimpuls und dem Vektor der Kreisfrequenz:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_A & 0 & 0 \\ 0 & I_B & 0 \\ 0 & 0 & I_C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_A \omega_x \\ I_B \omega_y \\ I_C \omega_z \end{pmatrix} \qquad \vec{L} = \tilde{I} \cdot \vec{\omega}$$

Im allgemeinen Fall (unsymmetrische Körper und/oder andere Drehachsen) sind auch die Nichtdiagonalelemente des sog. **Trägheitstensors** ungleich null. Dabei fallen Drehimpulsachse, Drehachse und Symmetrieachsen des Körpers nicht mehr zusammen und es entstehen komplizierte Bewegungen (**Nutation**). Hierbei bleibt die Drehimpulsachse ortsfest, während die Figurenachse (i.d.R. eine Symmetrieachse des Körpers) und die Drehachse umeinander und um den Drehimpuls rotieren.

Spielende Kinder in einem Bild von Pieter Bruegel dem Älteren (um 1525 - 1569)

Spielende Kinder (Wolfgang und Niels) 1954 in Lund/Schweden

Stehauf-Kreisel (tippy-top), Patent 1892 Helene Sperl.

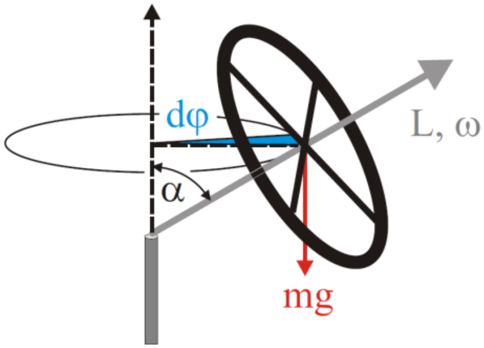
Präzession des Kreisels

Hier sei nur ein relativ einfache Fall betrachtet: Ein symmetrischer Kreisel rotiert um eine Hauptachse (Drehimpuls || Kreisfrequenzvektor) und ist an einem Punkt unterstützt. Aufgrund der Schwerkraft wirkt auf ihn ein Drehmoment (s. Skizze)

$$\vec{D} = \vec{r} \times m\vec{g} = \dot{\vec{L}} = L \cdot \sin\alpha \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\rightarrow \quad \dot{\varphi} \equiv \omega_p = \frac{D}{L \cdot \sin\alpha} = \frac{m \cdot g \cdot r \cdot \sin\alpha}{I \cdot \omega \cdot \sin\alpha}$$

$$\boxed{\omega_p = \frac{m \cdot g \cdot r}{I \cdot \omega}}$$



Kreiselbahn

Ein Zylinder, der einen Kreisel mit horizontaler Achse enthält, läuft auf einer schmalen gekrümmten Schiene entlang, ohne herunter zu fallen. Wenn der Zylinder nach rechts oder links zu kippen droht, bewirkt das Drehmoment $\vec{D} = \vec{r} \times m\vec{g}$

eine Drehung des Drehimpulsvektors (und damit des ganzen Zylinders) nach links oder rechts, so dass der Zylinder auf die Bahn zurück gelenkt wird. Das funktioniert natürlich nur bei der richtigen Drehrichtung: der Drehimpuls muss nach rechts (in Fahrtrichtung gesehen) zeigen.