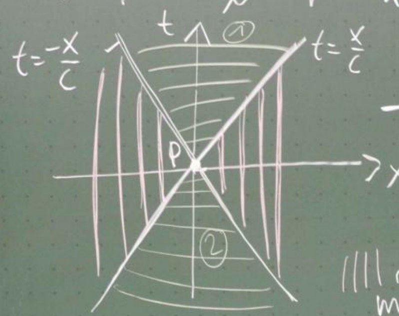
"Länge" eines Vierervektors in der Raumzeit

$|x| \equiv \sqrt{x^\mu x_\mu} = \sqrt{c^2 t_x^2 - \vec{x}^2}$



Licht: $x^\mu x_\mu = 0$

— $x^\mu x_\mu = 0$ lichtartig

≡ ① "Zukunft" $x^\mu x_\mu > 0$ zeitartig + Vergangenheit ②

//// nicht mit P kausal verknüpft, "außerhalb des Lichtkegels" $x^\mu x_\mu < 0$ raumartig

Klass. Mechanik $v \ll c$

$\vec{r}$, t

Galilei-trafos

Addition von Geschwindigkeiten

Skalarprodukt

$\vec{r} \cdot \vec{r} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Euklidisch; $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\,\vec{r}}$

$x^\mu = (ct_x, \vec{x})$

$y^\mu = (ct_y, \vec{y}) \to y_\mu = (ct_y, -\vec{y})$

Spez. Relativitätstheorie

$(ct, \vec{x})$

Vierervektoren im Minkowskiraum

3D-Raum + 1D-Zeit } Raumzeit

→ Lorentztrafos

Modifikation der "Addition der Geschwindigkeiten"

$x^\mu y_\mu = c^2 t_x t_y - \vec{x} \cdot \vec{y}$

Das Skalarprodukt ist invariant unter Lorentztrafos, d.h. Skalarprodukte sind vom Bezugssystem unabhängige Größen im Gegensatz zu den einzelnen Komponenten eines Vierervektors. Insbesondere ist für das Licht $x^\mu x_\mu = 0$ in jedem Bezugssystem => Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Relativistische Kinematik

$E, \vec{p}$: Energie, Impuls eines kräftefreien Teilchens

Viererimpuls $p^\mu \equiv (E, c\vec{p})$, $p_\mu = (E, -c\vec{p})$

$E, \vec{p}$ hängen vom Bezugssystem ab

$p^\mu p_\mu = E^2 - c^2 \vec{p}^{\,2}$ ist invariant!

häufig in der Theorie $c = 1$

Warum ist diese Definition des Skalarproduktes sinnvoll?

Lorentztrafo: $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\quad t=\gamma\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right),\ x=\gamma(x'+vt')$

$$x^\mu y_\mu = c^2 t_x t_y - \vec{x}\cdot\vec{y} = c^2\gamma^2\left(t'_x+\frac{vx'}{c^2}\right)\left(t'_y+\frac{vy'}{c^2}\right) - \gamma^2(x'+vt'_x)(y'+vt'_y)$$

$$= t'_x t'_y (c^2 - v^2)\gamma^2 + t'_x y'\left(c^2\gamma^2\frac{v}{c^2} - \gamma^2 v\right) + t'_y x'\left(c^2\gamma^2\frac{v}{c^2} - \gamma^2 v\right)$$

$$+ x'y'\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)\gamma^2 = t'_x t'_y c^2\gamma^2 \underbrace{\left(\frac{c^2-v^2}{c^2}\right)}_{1} - x'y'\gamma^2\underbrace{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}_{1}$$

$$\boxed{1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{\gamma^2}}$$

$$= c^2 t'_x t'_y - \vec{x}'\cdot\vec{y}' = x'^\mu y'_\mu$$

Analog gilt $\underline{E=\gamma E_0}$ (A)

Vergleiche mit nicht-relativistischem Grenzwert $v \ll c$

$$E_{ges} = E_{kin} \underbrace{+\ const}_{} = \frac{1}{2}mv^2$$

(*) Energien in klass. Physik (ohne ART) nur bis auf additive Konstanten bestimmt

vergleiche mit (A):

$$E = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}E_0 \cong \left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)E_0$$

Taylorentwicklung für kleine $x \ll 1$: $f(x) = f(0) + x\cdot\frac{df}{dx}\Big|_{x=0} + O(x^2)$ $\quad\Big|\quad (1+x)^n = 1 + x\cdot n(1+x)^{n-1}\Big|_{x=0} = 1+nx+O(x^2)$

Teilchen sei in seinem Ruhesystem

$\vec{p}=0$: $p^\mu = (E_0, 0, 0, 0)$

E_0: Ruheenergie ; $E_0 = mc^2$ ≙ Masse des Teilchens

$$p^\mu p_\mu = E_0^2 = m^2c^4$$

Licht ist masselos $(m=0)$: $p^\mu p_\mu = 0$

E: Gesamtenergie

p^μ: Komponenten transformieren analog zu den entsprechenden Komponenten der Raumzeit $x^\mu = (tc, \vec{x})$, d.h. Lorentztrafos.

Sei z.B. t_0 Zeitdifferenz im Ruhesystem des Teilchens, so gilt $t = \gamma t_0$

$$E = \underbrace{E_0}_{const.} + \frac{1}{2} E_0 \frac{v^2}{c^2} \overset{!}{=} \frac{1}{2} m v^2 + const$$

$\Rightarrow \boxed{E_0 = m \cdot c^2}$ Masse ist eine Form von Energie

$\Rightarrow E = E_{ges} = E_{Kin} + E_{Ruhe}$; $E_{Ruhe} = E_0 = mc^2$

$\Rightarrow E_{kin} = E_0(\gamma - 1) = mc^2(\gamma - 1)$

Relativistischer Zusammenhang zwischen $\vec{v}$ und $\vec{p}$

4er-Skalarprodukt

$$\vec{p}^2 c^2 = E^2 - E_0^2 = E_0^2(\gamma^2 - 1) = (mc^2)^2 \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right) = (mc^2)^2 \frac{v^2}{c^2} \cdot \gamma^2$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = m \vec{v} \gamma}$

Beispiel: Relativistische Zerfall eines Teilchens

Gesamtenergie und -impuls sind erhalten, Gesamtmasse und -teilchenzahl i.A. nicht.

$\pi^0 \to \gamma\gamma$ $\quad$ γ: Lichtquant "Photon"

$m_{\pi^0} \neq 0$ $\quad$ Im π^0-Ruhesystem $P^\mu = (m_{\pi^0} c^2, 0, 0, 0)$

q_1^μ, q_2^μ: Viererimpulse der Photonen

$q_i^\mu = (E_i, c\vec{q}_i)$

$P^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu \to$ 1. Komponente dieser Gleichung: $m_{\pi_0} c^2 = E_1 + E_2$; 2.-4. Komponente: $0 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$

$q_{i\mu} q_i^\mu = E_i^2 - |\vec{q}_i|^2 c^2 = 0$, $i = 1, 2$

$\Rightarrow \boxed{E_1 = E_2}$ $\quad$ $|\vec{q}_1| = |\vec{q}_2|$ $\quad$ $\boxed{E_{1,2} = \frac{m_{\pi^0} c^2}{2}}$