

## Typische Bahnen von Raumsonden

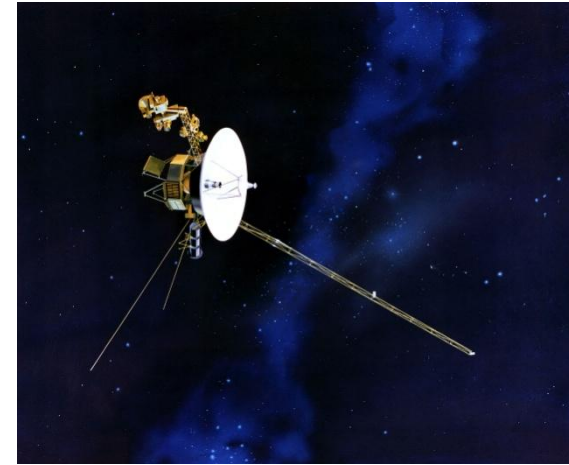
### Kreis- und Ellipsenbahnen z.B.

- ... niedriger Erdorbit, geosynchron oder ferner Erdorbit
- ... kleine oder große Inklination (Winkel zur Äquatorebene)
- ... interplanetare Bahn, z.B. Hohmann-Ellipse, die zwei kreisförmige Bahnen verbindet

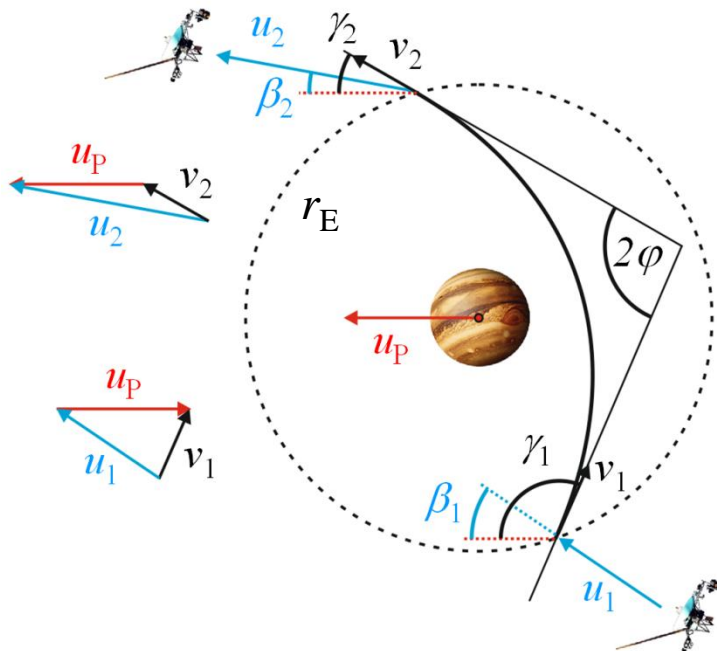
### Parabelbahn als Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel

### Hyperbelbahn z.B.

- ... zum Verlassen des Sonnensystems (z.B. Voyager 1 und 2)
- ... *swing-by*- bzw. *gravity-assist*-Manöver, bei dem kinetische Energie gewonnen wird



Voyager 1



**Schema eines *swing-by*-Manövers:** Innerhalb des Einflussbereichs mit Radius  $r_E$  wird eine hyperbolische Bahn unter Einfluss der Zentralkraft des Planeten betrachtet (schwarze Geschwindigkeitspfeile und Winkelangaben). Der Planet bewegt sich auf einer (lokal linear genäherten) Bahn um die Sonne (roter Pfeil). Im heliozentrischen System wird die Geschwindigkeit der Sonde durch die blauen Pfeile und Winkel beschrieben. Diese Geschwindigkeit nimmt durch das Manöver zu und ändert ihre Richtung (siehe Vektoraddition links), während der Planet einen vernachlässigbaren Betrag an kinetischer Energie verliert.

**Rutherford-Streuung:** z.B. Streuung von Alpha-Teilchen an Atomkernen in einer dünnen Goldfolie.

Repulsive Kraft:

Potenzial positiv, kein Potenzialminimum, Gesamtenergie stets  $E > 0$ , ungebundene Bahnen (Hyperbeln)

$$E = \frac{1}{2} \mu \cdot \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu \cdot r^2} + \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2} \mu \cdot \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \text{const.} \quad \alpha \equiv \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0}$$

Ergebnis der Rechnung analog zum Kepler-Problem:  $r(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon \cdot \cos \varphi - 1}$

Für  $r \rightarrow \infty$  vor dem Stoß ist  $\varphi = 0$ , danach ist der Winkel (wieder mit  $r \rightarrow \infty$ ) gegeben durch

$$\cos \varphi_0 = \frac{p/r+1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \quad \theta = \pi - 2\varphi_0 = \pi - 2 \cdot \arccos \frac{1}{\varepsilon}$$

gemäß der üblichen Definition des Streuwinkels  $\theta$ . Dieser Winkel hängt vom Stoßparameter  $b$  ab, dem senkrechten Abstand von der Achse des Streuzentrums. Es ist sinnvoll,  $\varepsilon$  in  $b$  umzurechnen:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \cdot \alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{4E^2 b^2}{\alpha^2}} \quad \text{weil} \quad L = \mu \cdot r \times v = \mu \cdot b \cdot v_\infty = \mu \cdot b \cdot \sqrt{2E/\mu} = b \cdot \sqrt{2E \cdot \mu}$$

Zusammenhang zwischen  $b$  und  $\theta$ :

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2E \cdot b}{\alpha}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}} \quad \rightarrow \quad \tan \varphi_0 = \frac{2E \cdot b}{\alpha}$$

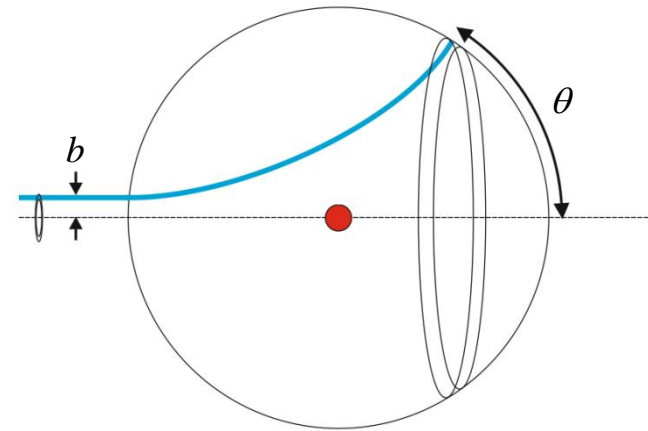
$$b = \frac{\alpha}{2E} \tan \varphi_0 = \frac{\alpha}{2E} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \rightarrow \quad b = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\theta}{2}$$

Je kleiner der Stoßparameter  $b$ , desto größer der Streuwinkel  $\theta$ , aber desto unwahrscheinlicher das Ereignis bei gleichverteilten  $\alpha$ -Teilchen. Ein Maß für die Streuwahrscheinlichkeit ist der sog. differentielle Streuquerschnitt  $d\sigma/d\Omega$  (Einheit:  $\text{m}^2/\text{sterad}$ ).  
Projektile fliegen durch Ringfläche

$$d\sigma = 2\pi \cdot b \cdot db$$

und werden in ringförmigen  
Raumwinkel gestreut:

$$d\Omega = 2\pi \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{b}{\sin\theta} \cdot \frac{db}{d\theta} = \frac{\alpha}{2E} \cdot \frac{\cot(\theta/2)}{\sin\theta} \cdot \frac{\alpha}{2E} \cdot \left| \frac{d}{d\theta} \cot(\theta/2) \right| = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Rutherford-  
Streuformel

Aus Abweichungen von der Rutherford-Streuformel können Größe und Ladungsverteilung der Atomkerne gewonnen werden. Mit höheren Teilchenenergien wurde auch die Struktur des Nukleons (Proton, Neutron) untersucht. Für die historisch wichtigere Streuung von Elektronen gilt allerdings die Mott-Streuformel, die bei großen Winkeln von der Rutherford-Formel abweicht (weil Elektronen im Gegensatz zu  $\alpha$ -Teilchen einen "Spin"  $s = 1/2$  besitzen).



Der 3 km lange Linearbeschleuniger am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) in Menlo Park (CA, USA) ist seit über 50 Jahren der größte Linearbeschleuniger weltweit. Hier wurden Streuexperimente mit Elektronen bis 50 GeV Energie durchgeführt, um die Struktur des Nukleons zu untersuchen.



Robert Hofstadter  
(1915 – 1990)

## 2.1.11 Stoßprozesse

Zwei der Wechselwirkung zweier Körper ist es nicht immer notwendig und sinnvoll, die gesamte Flugbahn zu studieren. Meist genügt die Kenntnis aller Parameter vor und nach dem Stoß, deren Beziehung durch den Energie- und Impulssatz bestimmt wird.

Stoßprozesse sind von großer Wichtigkeit, insbesondere für die Untersuchung von Objekten, die sich der direkten Betrachtung entziehen z.B. in der Atom-, Kern- und Elementarteilchenphysik.

Makroskopische Stoßprozesse: Kollision von Billardkugeln, Autos, Galaxien ...

Der **Gesamtimpuls** bleibt immer erhalten:  $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  (mit Strich: nach dem Stoß)

Die **Energie** bleibt nicht immer erhalten:  $\frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + Q$

$Q = 0$ : elastischer Stoß, Energieerhaltung

$Q < 0$ : inelastischer Stoß, Energie geht in "innere Energie" über z.B. Wärme, Deformation etc.

$Q > 0$ : superelastischer Stoß, Energie wird aus innerer Energie gewonnen

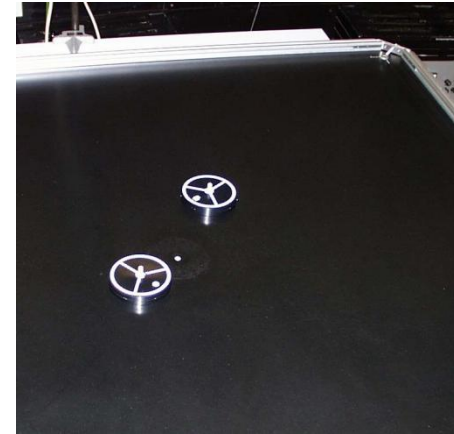
(reaktive Stöße: Stoßpartner verändern ihre Massen z.B. chemische Reaktionen, Teilchenreaktionen ...)

Um innere Energie aufzunehmen oder abzugeben, müssen Stoßpartner eine Struktur haben, also z.B. nicht punktförmig sein wie das Elektron.

## Experimente auf dem Luftkissentisch

### Kegelschnittbahnen

Ein tangential angestoßener Puck an einer in einem Punkt fixierten Feder beschreibt eine Kreisbahn. Ein schräg angestoßener Puck beschreibt eine Ellipse. Ein Puck wird von einem zweiten fixierten Puck magnetisch abgestoßen und beschreibt eine Hyperbelbahn.



### Stoßprozesse

Zentraler elastischer Stoß gleicher Massen (Masse 2 ruht)

→ Masse 2 bewegt sich, Masse 1 bleibt stehen

Nichtzentraler elastischer Stoß gleicher Massen (Masse 2 ruht)

→ Winkel der beiden Bahnen nach dem Stoß ist immer 90 Grad

Stöße ungleicher Massen (Masse 2 ruht)

→ große Masse 1 bewegt sich nach dem Stoß nach vorne

→ kleine Masse 1 wird zurückgestreut

Zentraler inelastischer Stoß (Masse 2 ruht, beide Massen haften durch Klettband aneinander)

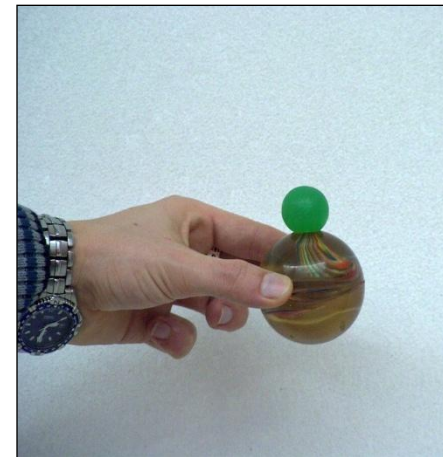
→ Massen bewegen sich gemeinsam nach vorne

Nichtzentraler inelastischer Stoß

→ Massen bewegen sich gemeinsam nach vorne und rotieren umeinander

### Flummis:

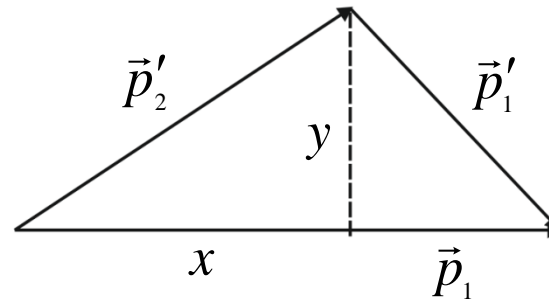
Zwei übereinander angeordnete Gummibälle werden losgelassen und prallen auf den Fußboden. Der untere (große) Ball springt nicht sehr hoch, der obere (kleine) Ball springt hoch und erreicht ein Mehrfaches der Ausgangshöhe. Warum?



### Nichtzentraler elastischer Stoß ( $Q = 0$ ) mit $p_2 = 0$ ("fixed target")

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$



rechtes Dreieck  $p_1'^2 = (p_1 - x)^2 + y^2$

linkes Dreieck  $p_2'^2 = x^2 + y^2$

Energiegleichung  $\rightarrow \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1^2 - 2p_1x + x^2 + y^2}{2m_1} + \frac{x^2 + y^2}{2m_2}$

Hauptnenner  $2m_1m_2$   $m_2p_1^2 = m_2p_1^2 - 2m_2p_1x + m_2x^2 + m_2y^2 + m_1x^2 + m_1y^2$

$$0 = -2m_2 \cdot m_1 \cdot v_1 \cdot x + (m_1 + m_2)x^2 + (m_1 + m_2)y^2$$

geteilt durch  $(m_1+m_2)$   $0 = -2\mu \cdot v_1 \cdot x + x^2 + y^2$

quadratisch ergänzt  $\mu^2 v_1^2 = -2\mu \cdot v_1 \cdot x + x^2 + y^2 + \mu^2 v_1^2 \rightarrow (x - \mu \cdot v_1)^2 + y^2 = \mu^2 v_1^2$

$\mu$ : reduzierte Masse  $\mu \equiv \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$

#### Ergebnis:

Kreis mit Mittelpunkt  $(\mu v_1, 0)$  und Radius  $\mu v_1$ .  
Ausgehend vom Nullpunkt liegt die Spitze von

$$p_2' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

stets auf diesem Kreis.