Wiederholung

Bewegung eines Körpers im Zentralkraftfeld (z.B. Gravitationsfeld, Coulomb-Feld).

1) Statt Bewegung von 2 Körpern um den gemeinsamen (kräftefreien) Schwerpunkt wird die Bewegung eines Körpers mit reduzierter Masse μ um einen anderen ortsfesten Körper betrachtet.
Oft ist die Position des Schwerpunkts fast gleich der Position der größeren Masse
(z.B. Erdmasse ist nur $3 \cdot 10^{-6}$ der Sonnenmasse, Jupitermasse ist 10^{-3} der Sonnenmasse, die Masse von Raumsonden gänzlich vernachlässigbar).

$$\vec{F}(\vec{r}) = \mu \cdot \ddot{\vec{r}}$$

2) Energie- und Drehimpulserhaltung in Polarkoordinaten

$$E = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu \cdot r^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \text{const.}$$

3) Effektives Potenzial: Eindimensionale Bewegungsgleichung. Lösung:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - V_{eff}(r)} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_0}^{r(t)} \frac{d\hat{r}}{\sqrt{E - V_{eff}(\hat{r})}} = \pm\int_{t_0}^{t} d\hat{t} = t - t_0$$

Separation der Variablen. Allgemein: "Separable" DGL 1. Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = a(x) \cdot b(y) \quad \rightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{1}{b(\hat{y})} d\hat{y} = \int_{x_0}^{x} a(\hat{x}) \cdot d\hat{x} \quad \rightarrow \quad y = f(x)$$

Statt $r(t)$ ist oft eher die Bahngleichung $r(\varphi)$ von Interesse. Lösung:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = \pm\frac{r^2}{L}\sqrt{2\mu}\sqrt{E - V_{eff}(r)} \quad \rightarrow \quad d\varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2\mu}} \cdot \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

Das Kepler-Problem

Bewegung eines Körpers in Gravitationspotenzial: $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\alpha}{r}$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\frac{L}{\sqrt{2\mu}} \cdot \int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{d\hat{r}}{\hat{r}^2\sqrt{E - \alpha/\hat{r} - L^2/(2\mu\cdot\hat{r}^2)}}$$

$$-\frac{d}{dr}V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} = F(r)$$

Substitution: $s \equiv \frac{1}{\hat{r}}$ $\quad \frac{ds}{d\hat{r}}$ $\quad \rightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = \pm\frac{L}{\sqrt{2\mu}} \cdot \int_{1/r_0}^{1/r(\varphi)} \frac{ds}{\hat{r}^2 (ds/d\hat{r})\sqrt{E - \alpha\cdot s - L^2 s^2/(2\mu)}}$

$$= \mp\frac{L}{\sqrt{2\mu}} \cdot \int_{1/r_0}^{1/r(\varphi)} \frac{ds}{\sqrt{E - \alpha\cdot s - L^2 s^2/(2\mu)}} = \mp\int_{1/r_0}^{1/r(\varphi)} \frac{ds}{\sqrt{2\mu E/L^2 - 2\mu\cdot\alpha\cdot s/L^2 - s^2}}$$

$$\frac{2\mu E}{L^2} - \frac{2\mu\cdot\alpha}{L^2}s - s^2 = -\left(s - \frac{\mu\cdot\alpha}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu\cdot E}{L^2}\right) \equiv -(s-b)^2 + a = a\left(1 - \left\{\frac{s-b}{\sqrt{a}}\right\}^2\right)$$

Substitution: $u \equiv \frac{s-b}{\sqrt{a}}$ $\quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ $\quad \varphi - \varphi_0 = \mp\int_{u_0}^{u(\varphi)} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pm\left(\arccos\{u\} - \arccos\{u_0\}\right)$

$$\arccos\{u\} = \arccos\{u_0\} \mp (\varphi - \varphi_0)$$

$$u(\varphi) = \cos\left(\arccos\{u_0\} \mp \{\varphi - \varphi_0\}\right) = \cos(\varphi - \varphi_1) \qquad \text{z.B. } \varphi_1 = 0$$

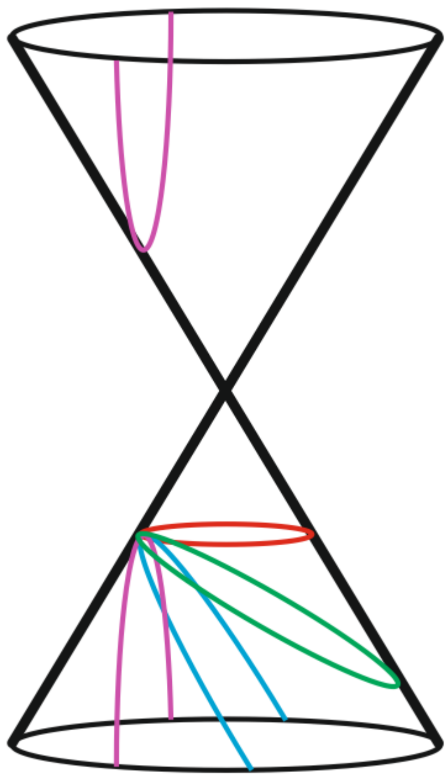
Substitution zurück:

$$u \equiv \frac{s-b}{\sqrt{a}} = \frac{1/r - \mu\cdot\alpha/L^2}{\sqrt{\left(\mu\cdot\alpha/L^2\right)^2 + 2\mu\cdot E/L^2}} = \frac{L^2/(\mu\cdot\alpha\cdot r)-1}{\sqrt{1+2EL^2/\left(\mu\cdot\alpha^2\right)}} \equiv \frac{p/r-1}{\varepsilon}$$

p: Halbparameter
ε: Exzentrizität

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cdot u(\varphi)}$$

Endergebnis: $$\boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}}$$



Kegelschnitte

$\varepsilon = 0$: Kreis $r(\varphi)$ konstant
$0 < \varepsilon < 1$: Ellipse
$\varepsilon = 1$: Parabel
$\varepsilon > 1$: Hyperbel
$\varepsilon < 0$? andere in der Literatur verwendete Konvention, entspricht $\varphi_1 = \pi$, Kegelschnitte gespiegelt

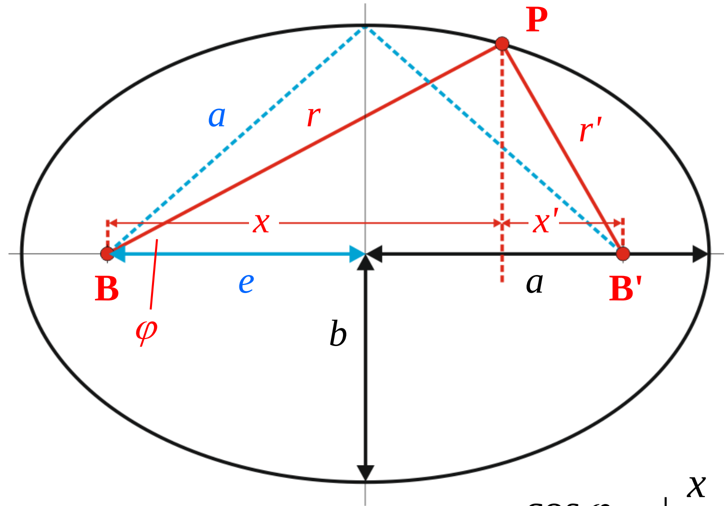
Beschreibt die Gleichung wirklich eine Ellipse?
Z.B. mit der "Minus"-Konvention (s. Gerthsen, Physik):

$$r(\varphi) = \frac{p}{1-\varepsilon\cdot\cos(\varphi)} \qquad p \equiv \frac{b^2}{a} \qquad \varepsilon = \frac{e}{a}$$

mit $\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$:

$$r\left(1-\varepsilon\frac{x}{r}\right) = r - \varepsilon\cdot x = p \qquad r' - \varepsilon\cdot x' = p$$

$$r + r' = 2p + \varepsilon(x+x') = 2p + 2\varepsilon\cdot e = 2\left(\frac{b^2}{a}+\frac{e^2}{a}\right) = 2a$$



$$\cos\varphi = \pm\frac{x}{r}$$

Ellipse: Summe von r und r' (Entfernungen des Punkts P von den Brennpunkten B und B') ist immer $2a$, wobei a die große Halbachse ist. Die Entfernung zwischen B und B' ist $2e < 2a$. Aus a und e ergibt sich die kleine Halbachse b gemäß

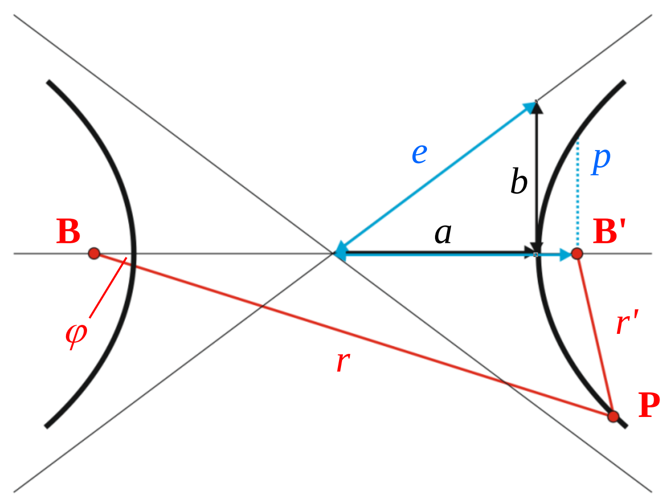
$$e^2 + b^2 = a^2$$

1. Keplersches Gesetz:
Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen mit der Sonne (eigentlich: Schwerpunkt von Sonne und Planet) in einem der Brennpunkte.

Hyperbel: Differenz von r und r' (Entfernungen des Punkts P von den Brennpunkten B und B') ist immer $2a$. Die Steigung der asymptotischen Geraden ist $\pm\, b/a$. Die Entfernung vom Kreuzungspunkt der Asymptoten ist e. Hier gilt

$$a^2 + b^2 = e^2$$

Der Halbparameter p ist bei der Ellipse und bei der Hyperbel die senkrechte Entfernung vom Brennpunkt zur Kurve.



Was ist mit dem 3. Keplersches Gesetz? Flächensatz:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} \quad \rightarrow \quad \frac{A}{T} = \frac{L}{2\mu}$$

Fläche der Ellipse $A = \pi \cdot a \cdot b$

Definition $p \equiv \frac{L^2}{\mu \cdot \alpha} \quad \rightarrow$

$$L^2 = p \cdot \mu \cdot \alpha = \frac{b^2}{a} \mu \cdot \alpha$$

$$T^2 = \frac{4\mu^2 \cdot A^2}{L^2} = \frac{4\mu^2 \cdot \pi^2 \cdot a^2 \cdot b^2}{b^2 \cdot \mu \cdot \alpha / a} = \frac{4\pi^2 \cdot \mu \cdot a^3}{\alpha}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \approx \frac{4\pi^2}{G \cdot m_2} = \text{const.}$$

3. Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

Vis-viva-Gleichung: wichtig z.B. für die Bahnmechanik von Raumsonden.
vis viva (lat.) = "lebendige Kraft", Bezeichnung von Gottfried Leibnitz für die Konstante $m \cdot v^2$

$$\varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \cdot \alpha^2}} \quad \rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 - 1\right) \cdot \frac{\mu \cdot \alpha^2}{L^2}$$

$$E = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 - 1\right) \frac{\mu \cdot \alpha^2}{a \cdot \left(1 - \varepsilon^2\right) \cdot \mu \cdot \alpha} = -\frac{\alpha}{2a} \qquad \text{mit} \qquad p \equiv \frac{L^2}{\mu \cdot \alpha} = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{a^2 - a^2\varepsilon^2}{a} = a \cdot \left(1 - \varepsilon^2\right)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\mu \cdot v^2 = -E_{pot} + E = \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{2a} \quad \rightarrow \quad \boxed{v^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \quad \text{wenn} \quad M \equiv m_2 >> m_1$$

ergibt die Momentangeschwindigkeit bei Position r auf Ellipsen und Hyperbeln

Effektives Potenzial beim Keplerproblem und "Potenzialmulde"

Das effektive Potenzial ergibt sich aus einer attraktiven Kraft (Gravitation) und einer repulsiven Scheinkraft (Zentrifugalkraft). Zusammen bilden sie ein Minimum bei einem bestimmten Abstand. Das anschauliche Bild eines Körpers in einer "Potenzialmulde" findet sich in verschiedenen Bereichen der Physik wieder (Atom- und Kernphysik, Festkörperphysik, Beschleunigerphysik, etc.). Das Potenzial eines harmonischen Oszillators ist parabolisch. Andere Potenzialmulden kann man für kleine Auslenkungen mit einer Parabel nähern. Im Fall der Gravitation:

$$E = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu \cdot r^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \text{const.}$$