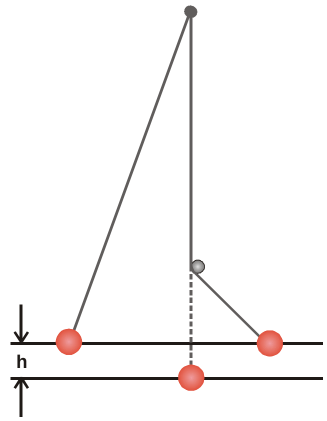
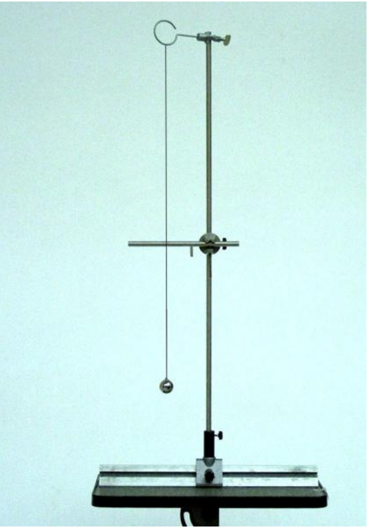
Experimente zum Energieerhaltungssatz:





1) Hemmungspendel: Aufgrund der Erhaltung der Energie hängt die in den Umkehrpunkten des Pendels erreicht Höhe nicht von der Fadenlänge ab.

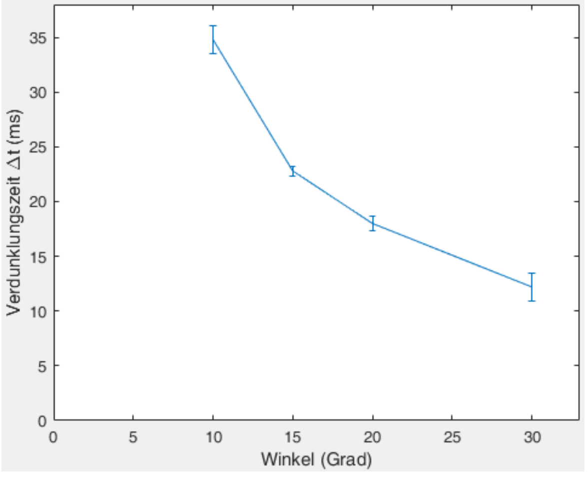
2) Physikalisches Pendel: Die Masse des Pendelstabs sei hier vernachlässigt, obwohl dies nicht ganz realistisch ist (s. später: Mechanik des starren Körpers). Die potenzielle Energie ist bei voller Auslenkung um den Winkel α ist

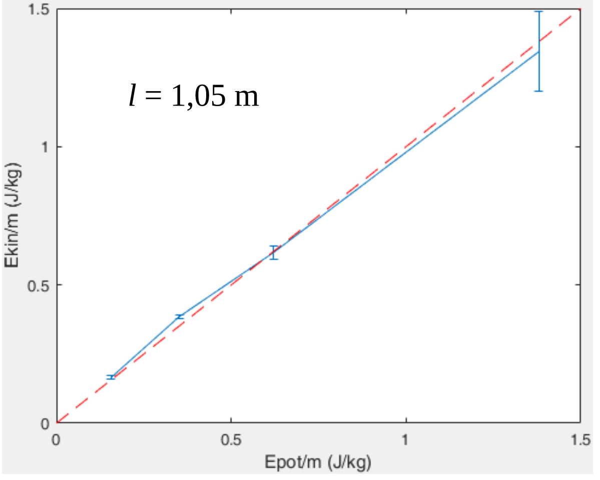
$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\alpha)$$

mit der Pendellänge l. Die maximale kinetische Energie ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot (\Delta s / \Delta t)^2$$

mit der im tiefsten Punkt gemessenen Verdunklungszeit Δt einer Lichtschranke durch eine Blende der Breite Δs = 20 mm. Für jeden Winkel (10, 15, 20, 30 Grad) wurde 5 Messungen durchgeführt und gemittelt.





Links: Gemessene Zeiten mit Standardabweichung als Funktion des Winkels. Rechts: Kinetische gegen potenzielle Energie aufgetragen (jeweils durch die Masse geteilt).

2.1.10 Bewegung im Zentralkraftfeld

Zwei Körper mit Masse m_1 und m_2, Bahnen: $\vec{r}_1(t)$ $\vec{r}_2(t)$

Zentralkraft: Kraft von Körper 2 auf 1: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \equiv \vec{F}\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right) = F(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$ $\qquad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \equiv \vec{r}$

Wichtig z.B. für:

a) Bahnen von Himmelskörpern, z.B. Erde (Körper 1) und Sonne (Körper 2)

Gravitationsgesetz $\quad F(r) = -G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ $\quad$ mit $\quad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \dfrac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$

(Bewegung von Planeten, Kometen, künstlichen Himmelskörpern etc.)

b) Streuung geladener Teilchen aneinander, z.B. α-Teilchen (Körper 1) und Atomkern (Körper 2)

Coulombgesetz $\quad F(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$ $\quad$ mit $\quad \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \cdot 10^9\, \dfrac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}$

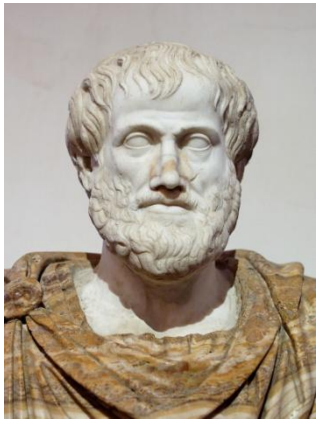
(Beispiel: Rutherford-Streuung um 1910, Entdeckung des Atomkerns)

Ansätze:

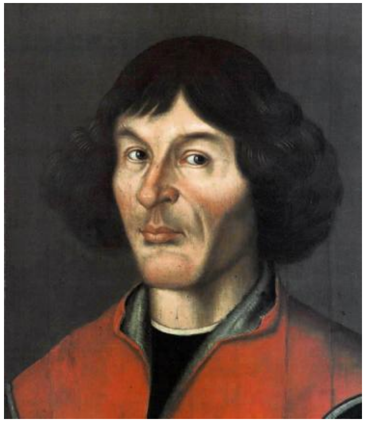
Impulserhaltung, Betrachtung im Ruhesystem eines Körpers
$\rightarrow$ Reduzierung auf 1-Körper-Problem mit reduzierter Masse

Drehimpulserhaltung, Bewegung in einer Ebene mit Polarkoordinaten,
Reduzierung auf 1 Dimension (radialer Abstand)

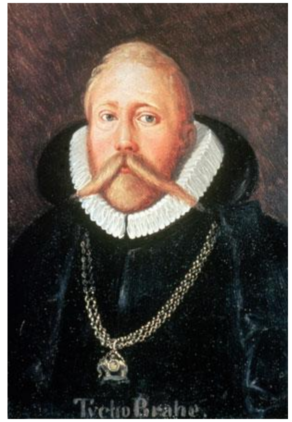
Energieerhaltung, Potenzial der Zentralkraft,
1-dimensionale Bewegungsgleichung lösen



Aristoteles
(384 – 322 v. Chr.)

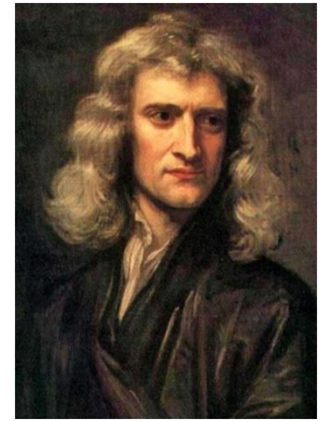


Nikolaus Kopernikus
(1473 – 1543)



Tycho Brahe
(1546 – 1601)

Johannes Kepler
(1571 – 1630)



Isaac Newton
(1643 – 1727)

Das – für Bewohner der Erde naheliegende – geozentrische Weltbild bestand seit der Antike. In ihm wird die Erde von allen Himmelskörpern umkreist, doch lassen sich die Bahnen der Planeten nur schwer verstehen. Nach der sog. Epizykeltheorie bewegen sie sich auf Kreisen, deren Mittelpunkte auf Kreisbahnen um die Erde wandern. Die Idee eines heliozentrischen Weltbildes, bei dem die Erde mit den anderen Planeten um die Sonne kreist, mag bereits in der Antike bestanden haben, wurde aber erst im 16. Jahrhundert von Nikolaus Kopernikus, Domherr in Preußen (heute Polen), ausgearbeitet. Der dänische Adlige und Astronom Tycho Brahe verfolgte die Vorstellung, dass die Erde zwar im Mittelpunkt ruht, die Planeten aber um die Sonne kreisen. Auf der dänischen (heute schwedischen) Insel Ven betrieb er ein Observatorium und führte umfangreiche und für die damalige Zeit sehr genaue Beobachtungen durch. Der Theologe, Mathematiker und Astronom Johannes Kepler wurde 1600 Brahes Assistent in Prag und verfügte nach Brahes Tod im Jahr 1601 über dessen Beobachtungsdaten. Er erkannte, dass diese nicht mit kreisförmigen Planetenbahnen vereinbar sind und stellte zwischen 1609 und 1618 folgende Gesetze auf:

1. Keplersches Gesetz: Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Keplersches Gesetz: Ein Linie zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

3. Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen der Bahnen.

Diese empirischen Befunde wurden um 1665/66 vom englischen Naturforscher Isaac Newton durch die Anwendung seines Gravitationsgesetzes begründet. Die Keplerschen Gesetze gelten für Zweikörpersysteme, z.B. Sonne und Planet unter Vernachlässigung der Wechselwirkung der Planeten untereinander. Das dritte Gesetz gilt nur in der Näherung, dass die Masse des Zentralgestirns viel größer ist als die des Planeten.

Bewegungsgleichung (2. Newtonsche Axiom) subtrahiert:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12} \qquad \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21} = -\frac{1}{m_2}\vec{F}_{12}$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}\right)\vec{F}_{12} \equiv \boxed{\frac{1}{\mu}\vec{F}(\vec{r}) = \ddot{\vec{r}}}$$

μ : reduzierte Masse
r : Differenzvektor

Betrachte Bewegung von 1 Teilchens mit reduzierter Masse μ und Relativkoordinate r in einem "äußeren" Kraftfeld $F(r)$. Wenn eine Masse (z.B. Sonne) viel größer ist als die andere (z.B. Erde), ist die reduzierte Masse fast dieselbe wie die Masse des zweiten Körpers (z.B. Erdmasse ist nur $3 \cdot 10^{-6}$ der Sonnenmasse, z.B. Jupiter 10^{-3}) und die Position des Schwerpunkts fast gleich der Position der ersten Masse.

Bewegungsgleichung addiert:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0 = (m_1 + m_2)\frac{m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} \equiv \boxed{M \cdot \ddot{\vec{R}}_s = \dot{\vec{P}}}$$

M : Gesamtmasse
R_S: Ort des Schwerpunkts
P : Gesamtimpuls

Schwerpunkt ruht oder bewegt sich gleichförmig (**Impulserhaltung).**

Mit der Position des Schwerpunkts und dem Relativvektor erhält man die Positionen der zwei Körper:

$$\vec{R}_s = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \cancel{m_2\vec{r}_2} + m_2\vec{r}_1 - \cancel{m_2\vec{r}_2} - m_2\vec{r}}{M}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_s + \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_s - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Drehimpulserhaltung

$\mu \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r)$ Bewegungsgleichung

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ Drehimpuls

$\dot{\vec{L}} = \mu \cdot \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \mu \cdot \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ Zentralkraft (*r* [anti]parallel zu *F*), Drehimpuls erhalten

$\vec{L} \perp \vec{r}$ $\vec{L} \perp \dot{\vec{r}}$ Bewegung in einer Ebene senkrecht zum Drehimpulsvektor

2. Keplersches Gesetz (Flächensatz): Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right| = \frac{\left|\vec{L}\right|}{2\mu} = \text{const}$$ (Änderung der überstrichenen Fläche pro Zeit *dt*)

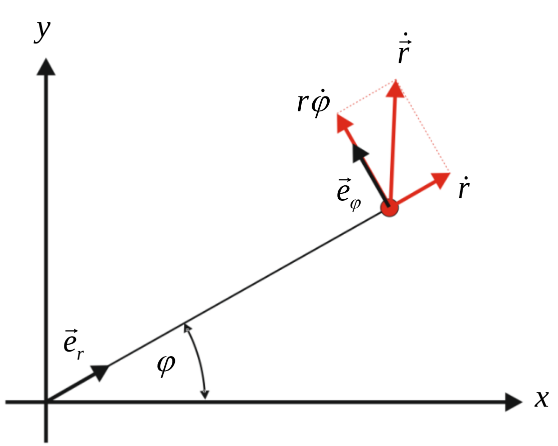
Betrag des Kreuzprodukts = Fläche des aufgespannten Parallelogramms

Polarkoordinaten (können bei Drehbewegungen in einer Ebene sinnvoll sein)

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r \cdot \vec{e}_r \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \end{aligned}}$$



Drehimpuls und kinetische Energie in Polarkoordinaten

$$\vec{L} = \mu \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu \cdot r \cdot \vec{e}_r \times \left(\dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi\right) = \mu \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_r = 0 \qquad \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$$

$$\left|\vec{L}\right| = L = \mu \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}\mu \cdot \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu \cdot r^2}$$

Erster Term: radialer Anteil
Zweiter Term: Winkelanteil, ohne explizite φ-Abhängigkeit

Potenzial: $E_{pot} = V(r) = -\int F(r) \cdot dr$

Energieerhaltung: $E = E_{pot} + E_{kin} = \text{const.}$

$$E = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu \cdot r^2} + V(r)}_{V_{eff}(r)} = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \text{const.}$$

Der zweite Term des effektiven Potenzials ist der Zentrifugalterm, denn seine negative Ableitung nach r ist gerade die Zentrifugalkraft:

$$-\frac{d}{dr}\frac{L^2}{2\mu \cdot r^2} = \frac{L^2}{\mu \cdot r^3} = \frac{\mu^2 \cdot r^4 \cdot \dot{\varphi}^2}{\mu \cdot r^3} = \mu \cdot r \cdot \dot{\varphi}^2$$

Lösen der Bewegungsgleichung durch Energiesatz und Separation der Variablen

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \text{const.}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - V_{eff}(r)} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_0}^{r(t)} \frac{d\hat{r}}{\sqrt{E - V_{eff}(\hat{r})}} = \pm\int_{t_0}^{t} d\hat{t} = t - t_0$$

Wie geht es weiter?

- Lösung $r(t)$ finden (hängt von der expliziten Form des effektiven Potenzials ab)

- Einsetzen in den Ausdruck für L und Lösung $\varphi(t)$ finden

$$L = \mu \cdot r^2 \dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{\mu \cdot r^2(t)} \quad \rightarrow \quad \varphi(t) - \varphi(t_0) = \frac{L}{\mu}\int_{t_0}^{t} \frac{d\hat{t}}{r^2(\hat{t})}$$

- Alternativ: Berechnung der Bahnkurve $r(\varphi)$

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt}\,\frac{dt}{d\varphi} = \dot{r}\,\frac{\mu \cdot r^2}{L} = \pm\frac{\mu \cdot r^2}{L}\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - V_{eff}(r)}$$

$$d\varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2\mu}} \cdot \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$