ε_{ij} : Epsilontensor in 2D

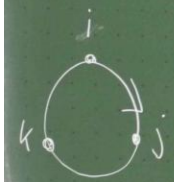
$i,j=1,2$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=1,\ j=2 \\ -1 & \text{für } i=2,\ j=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

11
12
21
22

$i,j,k=1,2,3$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk=123 \text{ und zyklische Vertauschungen davon, } 312, 231 \\ -1 & \text{für } ijk = 213, 132, 321 \\ 0 & \text{falls (mindestens) 2 Indizes gleich sind } \quad 223,\ 133 \text{ etc} \end{cases}$$



allg. Kreuzprodukt: $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$

Energieerhaltung (alternative Herleitung)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = \frac{1}{2}\, 2 \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$$

Newton: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, $\vec{F}$ konservativ, d.h., es gibt ein Potential $\Phi(\vec{r})$ mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$

$\vec{\nabla}$ Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ kart. Koord.

$$\rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \Big| \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\Leftrightarrow m\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = -\vec{\nabla}\Phi\cdot\dot{\vec{r}}$$

totales Differential

$$= -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Leftrightarrow m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Leftrightarrow m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) + \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \Phi(\vec{r})}_{E_{\text{gesamt}}}\Big) = 0$$

Rotation: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot}\,\vec{F}$

in Komponenten, Kartesische Koordinaten

$$(\text{rot}\,\vec{F})_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k$$

Summenkonvention

$$\boxed{\vec{r} = (\underset{x}{x_1}, \underset{y}{x_2}, \underset{z}{x_3})}$$

z.B. $$(\text{rot}\,\vec{F})_z = \underbrace{\varepsilon_{312}}_{+1}\frac{\partial}{\partial x}F_y + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{-1}\frac{\partial}{\partial y}F_x \qquad (z=3)$$

$\Rightarrow (\mathrm{rot}\,\vec F)_z = \frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x$

$\vec F$ konservativ $\mathrm{rot}\,\vec F = \vec\nabla\times(-\vec\nabla\phi) = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi$

dieser Ausdruck verschwindet

$$(\mathrm{rot}\,\vec F)_z = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right] = 0$$

$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec F = 0}$ umgekehrt? Warum folgt aus $\mathrm{rot}\,\vec F = 0$ dann $\vec F$ konservativ ist? Satz von Stokes

$$\oint_\Gamma \vec F(\vec r)\cdot d\vec r = \int_A (\vec\nabla\times\vec F)\cdot d\vec A$$

geschlossener Weg Γ — Fläche von Γ umschlossen

$d\vec A = dx\,dy\cdot\vec n$, $|\vec n| = 1$

__Beispiel__: Zentralkraft $r = |\vec r|$

$$\vec F(\vec r) = \tilde F(r)\cdot\frac{\vec r}{r} = f(r)\cdot\vec r$$

$\vec r = (x,y,z)$

$$[\vec\nabla\times\vec F]_z = [\vec\nabla\times(f(r)\cdot\vec r)]_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f(r)\,y) - \frac{\partial}{\partial y}(f(r)\cdot x) \qquad \Big|\; r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2},\quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{r} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = f'\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'\frac{y}{r}$$

$$= y f'\frac{x}{r} - x f'\frac{y}{r} = 0$$

usw ust !! Zentralkräfte sind konservativ!

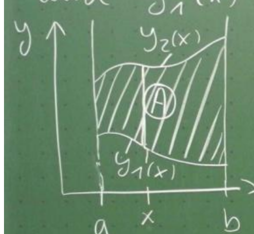
Flächen- und Volumenintegrale

a) Flächenintegrale: Sei A ein beschränkte Bereich in der x-y-Ebene und $f(x,y)$ eine Funktion.

$$I = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{oder auch} \quad \int_A f(x,y)\,dA$$

I heißt Flächenintegral von $f(x,y)$ über A

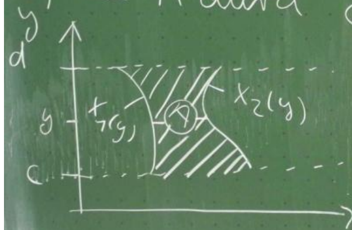
__Berechnung__: 1) Sei A durch $a \le x \le b$ und $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ definiert



Dann gilt

$$I = \int_a^b \Big[\underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}_{F(x)\ \text{Funktion von } x}\Big]\,dx$$

2) Sei A durch $c \le y \le d$ und $x_1(y) \le x \le x_2(y)$ gegeben

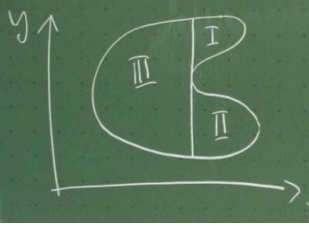


dann gilt

$$I = \int_c^d \underbrace{\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right]}_{\tilde F(y)} dy$$

$\tilde F(y)$ Funktion von y

3) allgemein: Zerlege A in endlich viele Bereiche vom Typ 1) und 2) und bilde die Summe der Integrale $A = \sum A_i$



Durch Variablentrafo ist es oft möglich, das Integrationsgebiet in ein rechteckiges Gebiet in den neuen Variablen zu transformieren und damit das Integral zu vereinfachen

$x, y \to u, v$ $\qquad dx\,dy = J\,du\,dv$

$x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$ $\quad J$: Jacobideterminante $\quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Beispiel: Polarkoordinaten (2D)

$$\left.\begin{aligned} x &= x(r,\varphi) = r\cos\varphi \\ y &= y(r,\varphi) = r\sin\varphi \end{aligned}\right\} J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & +r\cos\varphi \end{vmatrix} = |r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi| = r$$

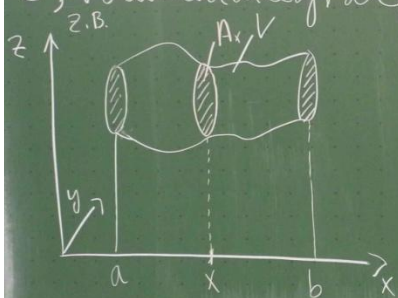
Fläche 1/4-Kreis

$F = \iint_A dx\,dy$ (Typ 1)

in Polarkoordinaten: $F = \iint_A dx\,dy = \int_0^R \int_0^{\pi/2} r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{2} \underbrace{\int_0^R dr\,r}_{\frac{R^2}{2}} = \frac{\pi R^2}{4}$

b) Volumenintegrale: auf Flächenintegrale zurückführen

z.B.



Volumen sei zwischen Ebenen bei $x=a$ und $x=b$.

A_x sei Schnittfläche bei x

$$\Rightarrow \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\iint_{A_x} f(x,y,z)\,dy\,dz\right] dx$$