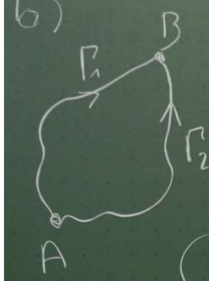
<u>Beispiel letzte Woche</u>: $P = \frac{175\text{ PS}}{2}$

4) Konservative und nichtkonservative Kräfte

a) Die am MP verrichtete Arbeit entlang eines beliebigen geschlossenen Weges Γ verschwindet

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

b) Die am MP verrichtete Arbeit ist unabhängig vom Weg



mit a) $W_{A\to A} = 0$

$$= \int_{A\,\Gamma_1}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{B\,\Gamma_2}^{A} \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$= \int_{A\,\Gamma_1}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{A\,\Gamma_2}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} \quad //$$

c) Die Kraft $\vec{F}$ ist wirbelfrei $\text{rot}\,\vec{F} = 0$ "Rotation"

d) Es existiert eine potentielle Energie E_{pot}, welche ausschließlich von den Koordinaten des Anfangs- und Endpunktes abhängt.

5) Potentielle Energie

Potentielle Energie ist diejenige Arbeit, welche man <u>gegen</u> die Kraft $\vec{F}$ verrichten muss, um den MP nach $\vec{r}$ zu befördern

$$E_{pot} = E_{pot}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\, d\vec{r}\,'$$

Man legt hierbei am Bezugspunkt $\vec{r}_0$ fest: $E_{pot}(\vec{r}_0) = 0$

Beispiel: Gewichtskraft

$\vec{r}_0$ auf "Erdoberfläche"

$\vec F = -mg\,\vec e_z \qquad E_{pot}(\vec r) = -\int_{\vec 0}^{\vec r}(-mg\,\vec e_z)\,d\vec r\,'$

$= +mg\int_{\vec 0}^{\vec r}(0,0,1)\cdot(dx',dy',dz')$

$= mg\left\{\int_0^x 0\cdot dx' + \int_0^y 0\cdot dy' + \int_0^z 1\cdot dz'\right\} = mgz$ hängt nur von Höhe ab.

hier: $\vec F = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\cdot\vec e_z$ ← "Gradient"

6) Energieerhaltungssatz

für MP mit konservativer Kraft, System abgeschlossen, d.h. keine äußere Wechselwirkung

$W_{A\to B} = E_{kin,B} - E_{kin,A}$

bei konservativer Kraft gilt aber auch

$W_{A\to B} = E_{pot,A} - E_{pot,B}$

gleichsetzen:

$E_{kin,B} - E_{kin,A} = E_{pot,A} - E_{pot,B}$

$\Leftrightarrow E_{kin,B} + E_{pot,B} = E_{kin,A} + E_{pot,A} = const$

$= E$ Gesamtenergie ist in abgeschlossenem System erhalten $E = E_{kin} + E_{pot}$

Für MP $E = \frac12 mv^2 + E_{pot}(x,y,z)$

Beispiel: E_{kin}, E_{pot} bei harmonischer Schwingung (1-Dim) $\quad A,\omega = const$

$x(t) = A\sin(\omega t),\quad \dot x(t) = v(t) = A\omega\cos\omega t$

$E_{kin} = \frac12 mv^2 = \frac12 mA^2\omega^2\cos^2\omega t$

$k = const$ Hooke'sches Gesetz

$E_{pot} = E_{pot}(x) = -\int_0^x F(x')\,dx' = -\int_0^x(-kx')\,dx'$

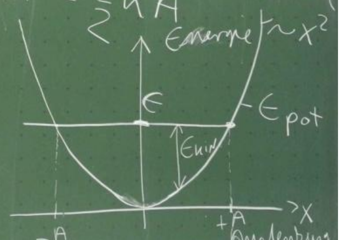
$= k\int_0^x dx'\,x' = k\frac{x'^2}{2}\Big|_0^x = k\frac{x^2}{2} = \frac k2 A^2\sin^2\omega t$

Gesamtenergie $E = E_{kin} + E_{pot} = \frac12 mA^2\left(\frac km\right)\cos^2\omega t + \frac12 kA^2\sin^2\omega t = \frac12 kA^2$

$\boxed{\omega^2 = \frac km}$

es gilt $\frac{dE}{dt} = 0$

E festgelegt durch Anfangsbedingungen



$\cos^2\omega t = \frac12(1+\cos 2\omega t) \quad (E_{kin})$

$\sin^2\omega t = \frac12(1-\cos 2\omega t) \quad (E_{pot})$

E_{kin}, E_{pot} oszillieren mit doppelter Winkelgeschwindigkeit

Linienintegrale, Potentiale, Gradient, Rotation

Berechnung von Linienintegralen, z.B.

$W_{A\to B} = \int_{\vec r_A}^{\vec r_B}\vec F\cdot d\vec r$

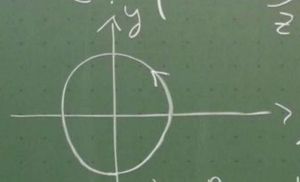
1D identisch zu "normalen" Integralen

1) allg. Verfahren bei Weg gegeben in Parameterdarstellung

Weg $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$t_A \le t \le t_B$ Intervall für Parameter t (kann z.B. Zeit sein)

Beispiel:

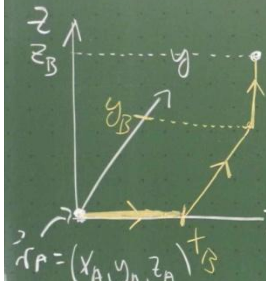


2D

Weg: $(\cos t, \sin t)$ Parameterdarstellung $0 \le t \le 2\pi$

$$\to W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)}\cdot dt}_{\text{Funktion von } t}$$

2) Kraft sei konservativ, d.h. $W_{A\to B}$ wegunabhängig.
Wähle einfachsten Weg, z.B. in Kartesischen Koordinaten entlang der x, y, z-Achse



$\vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$

$\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \underbrace{(F_x, F_y, F_z)}_{\vec{F}}(dx, dy, dz) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = E_{pot,A} - E_{pot,B}$$

F_x, F_y, F_z: Funktionen von x, y, z

$\Phi(x,y,z)$ sei skalare Funktion der Koordinaten mit
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -F_x, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -F_y, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -F_z$$

In Vektorschreibweise $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = -\vec{F}$

Da $d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz$ "totales Differential"

folgt
$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\left(\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)dx + \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dy + \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)dz\right)$$
$$= -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\phi = \phi(\vec{r}_A) - \phi(\vec{r}_B)$$
ϕ heißt Potential

Notation: $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ "Nabla operator" hier: in Kartesischen Koordinaten

$\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \operatorname{grad}\phi$ "Gradient"

Beispiel: Potential $\Phi(x,y,z) = 3x + 4yx - \frac{z^2}{3} + C$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 3 + 4y, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 4x, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{2}{3}z$$

Konstante C fällt heraus

Kraft $\vec{F} = -\operatorname{grad}\Phi = -\left(3 + 4y, 4x, -\frac{2}{3}z\right)$

$\Rightarrow$ konservative Kraft lässt sich immer als Gradient eines Potentials schreiben
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$$