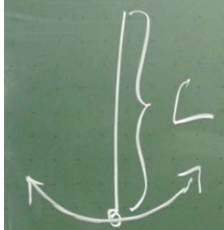
Pendel



$T = ?$

Parameter: L, g

1.) naive dimensionale Analyse:

$\sqrt{\frac{L}{g}}$ hat Einheit s.

2.) Wahl des geeigneten Koordinatensystems

→ Pendel: Polarkoordinaten

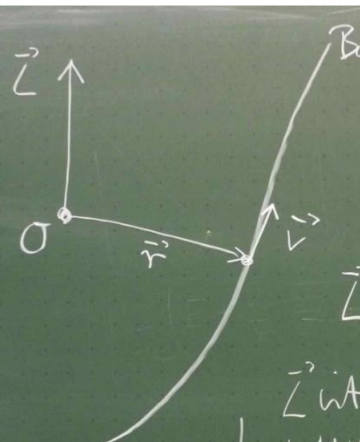
Drehimpuls und Drallsatz

Nützliche Größe bei Rotationsbewegungen: der Drehimpuls $\vec{L}$

$\vec{L}$ eines Teilchens der Masse m, Geschwindigkeit $\vec{v}$, d.h., mit Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$, ist gegeben durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$$

bezogen auf den Drehpunkt O.



$\vec{L}$ steht senkrecht auf der durch $\vec{r}$ und $\vec{p}$ definierten Ebene.

Bsp: Kreisbewegung um z-Achse

$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$: $\vec{L} = m r v \vec{e}_z = m r^2 \vec{\omega}$

$\vec{L}$ ist konstant bei gleichförmiger Kreisbewegung, d.h., $\omega = \text{const}$

$\vec{L}$ ändert bei allg. Bewegung Richtung und Betrag

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \underset{\uparrow\,\text{Newton}}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad \text{"Drehmoment"}$$

Drallsatz: $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$ Die zeitl. Änderung des Drehimpulses ist gegeben durch das Drehmoment, welches $\vec{F}$ auf das Teilchen ausübt

Bemerkung: 1) $\vec{L}$ und $\vec{\tau}$ müssen auf dasselbe Drehzentrum bezogen sein.

2) Drallsatz ist Newton II, welcher für Rotationen besser geeignet ist

Zentralkräfte

Eine Zentralkraft ist eine Kraft, welche an jedem Ort der Bahn auf dasselbe Zentrum O zeigt, d.h. $\vec{r} \parallel \vec{F}$ (parallel) oder $\vec{r} \uparrow\downarrow \vec{F}$ (antiparallel)

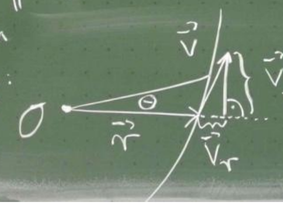
Der Drehimpuls eines Teilchens unter dem Einfluß einer Zentralkraft ist erhalten

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const}, \text{ da } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

Folgen: a) Bewegung erfolgt in einer Ebene ($\vec{L}$ ändert u.a. die Richtung nicht)

b) Flächensatz "Fahrstrahl (Radiusvektor vom Zentrum aus) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen"

Beweis:

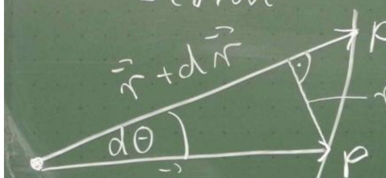


$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\perp$$

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\perp) = m\,\vec{r} \times \vec{v}_\perp$$

analog zur Kreisbewegung $\vec{v}_\perp = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\Rightarrow |\vec{L}| = m\,r^2\omega = m\,r^2\frac{d\theta}{dt} = m\cdot r^2(t)\,\frac{d\theta(t)}{dt} = \text{const}$$



Die Fläche dA, welche der Ortsvektor überstreicht, wenn das Teilchen von P nach P' geht, ist dA = "$\frac{1}{2}$ Grundlinie × Höhe"

$$dA = \frac{1}{2}(r + dr)\cdot r\,d\theta \approx \frac{1}{2} r^2\,d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m} = \text{const}$$

Arbeit und Energie

1) Arbeit W "work" Ein Massenpunkt bewege sich entlang einer Bahn von A nach A' unter dem Einfluß einer Kraft $\vec{F}$.

Die Arbeit ΔW, welche die Kraft an dem MP verrichtet, ist definiert durch das Skalarprodukt aus Kraft und Wegänderung $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}|\cos\theta = |\vec{F}_T|\cdot|\Delta\vec{r}|$$

"ΔW = Komponente der Kraft längs der Bahn · Wegänderung"

(nur die Tangentialkomponente vermittelt Arbeit)

Bei finiter Bewegung von $A \to B$:

$$W_{A\to B} \approx \sum \Delta W_i \quad \text{(beliebig viele Polygonstücke)}$$

$$\to \boxed{W_{A\to B} = \int_{\vec r_A}^{\vec r_B} \vec F \cdot d\vec r}$$

Bsp: $W_{A\to A} = \oint \vec F \cdot d\vec r$ geschlossener Weg

$[W] = Nm = J$ (Joule)

Linienintegral, hängt i.A. vom Weg ab

2) Leistung P "power"

momentane Leistung $P = \frac{dW}{dt} = \vec F \cdot \frac{d\vec r}{dt} = \vec F \cdot \vec v$

$[P] = \frac{Nm}{s} = \frac{J}{s} = W$ (Watt), alte Einheit 1 PS = 0,7355 kW

3) Kinetische Energie

Kraft $\vec F$ wirke auf MP mit Masse m, sodaß sich seine Geschwindigkeit von $\vec v_A$ auf $\vec v_B$ ändert. $ds = |d\vec r|$

Die am MP vermittelte Arbeit lautet

$$W_{A\to B} = \int_{\vec r_A}^{\vec r_B} \vec F \cdot d\vec r = \int_A^B F_T \, ds = \int_A^B m \frac{dv}{dt} \, ds$$

F_T: ändert Betrag des Impulses ; $v = |\vec v|$

$$W_{A\to B} = \int_A^B m \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} \cdot dv = \int_A^B m\, v \, dv = m \frac{v^2}{2}\Big|_A^B = \frac{m}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right).$$

$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ bzw $E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$

E_{kin} ist diejenige Energie, welche in der Bewegung steckt

$[E_{kin}] = [W] = J$

$W_{A\to B} = E_{kin,B} - E_{kin,A}$ | Arbeit am MP vermittelt = Änderung der kinetischen Energie

Bsp: Auto $m = 1t$, wird in 6s von 0 auf $100 \frac{km}{h}$ beschleunigt

$$E_{kin} = \frac{1}{2} 10^3 kg \left(100 \frac{10^3}{3600}\right)^2 m^2 s^{-2} \approx 3{,}9 \; 10^5 J$$

Leistung: $P = m \cdot a \cdot v = 1{,}3 \; 10^5 W$

(Konstante Beschleunigung $= 175$ PS