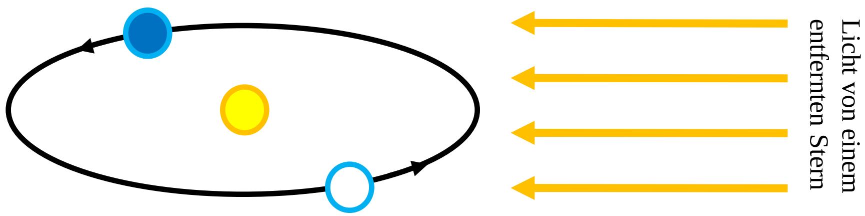
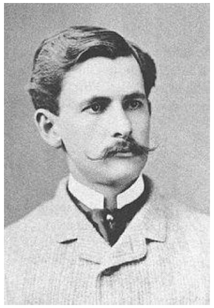
Wiederholung: Spezielle Relativitätstheorie

Ausgangspunkt

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in jedem gleichförmig bewegten Bezugssystem (Inertialsystem) aufgrund experimenteller Befunde (Widerlegung der Äthertheorie).

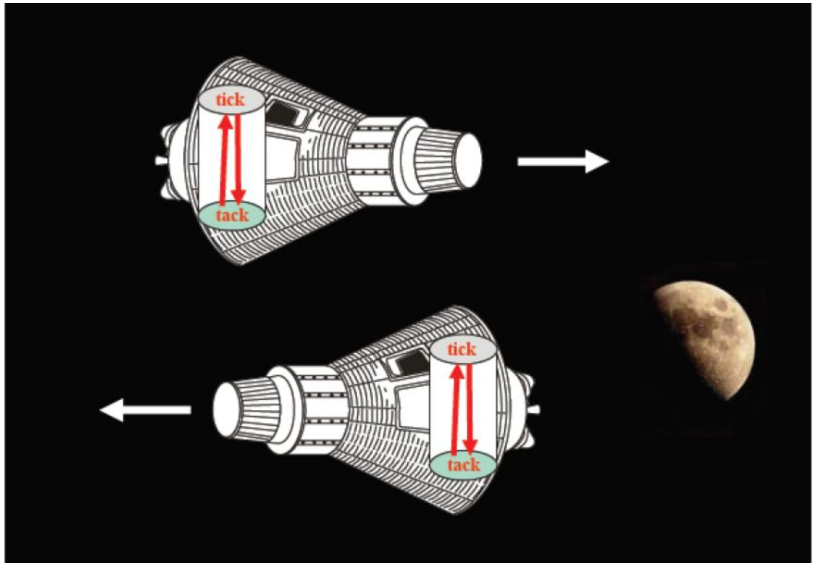


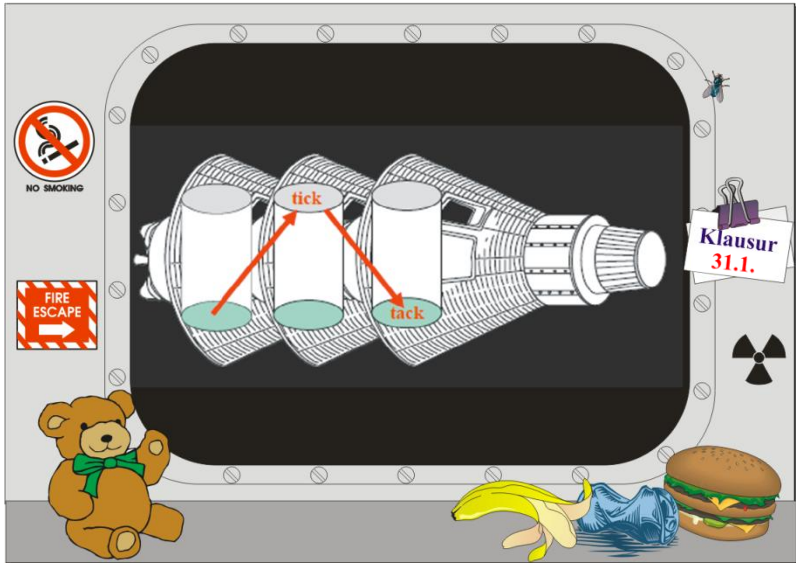


Albert Micheson
1852 – 1931

Edward Morley
1838 – 1923

Lichtuhr: Lichtpulse zwischen zwei Spiegeln z.B. 30 cm Abstand ergibt 1 ns. Der Lichtweg ist im bewegten Raumschiff länger. Da die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, läuft dort die Zeit aus der Sicht "meines" (des unbewegten) Raumschiffs langsamer.





Relativbewegung zwischen Bezugssystemen mit Geschwindigkeit v entlang der x-Achse.

Galilei-Transformation

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Lorentz-Transformation

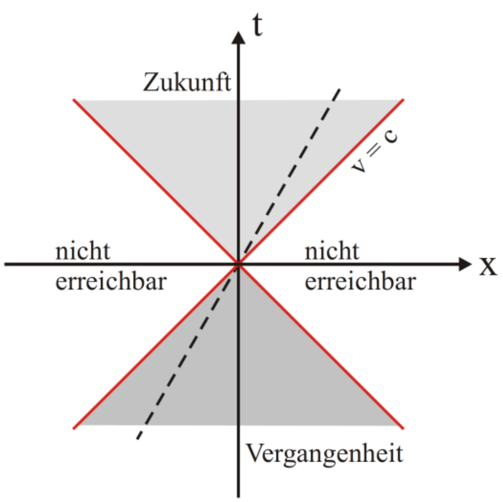
$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - vx/c^2\right)$$

Lorentz-Faktor:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Für Geschwindigkeit 0 ist $\gamma = 1$
für Elektronen in DELTA $\gamma \approx 3000$.

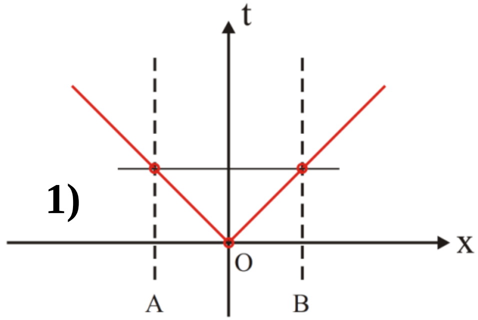
Für kleine Geschwindigkeiten v << c geht die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation über.

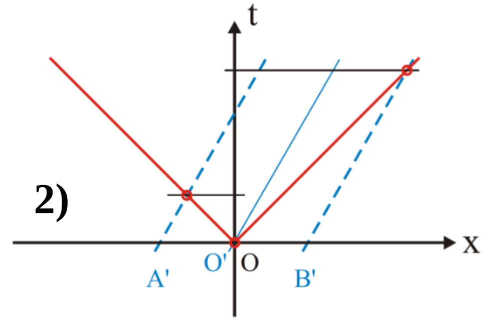


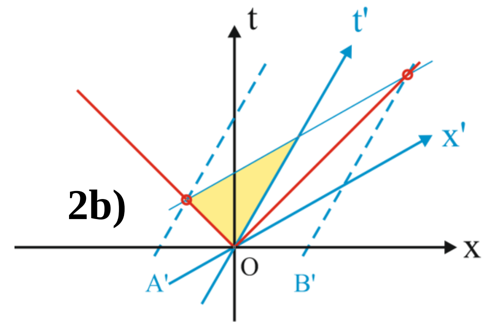
Albert Einstein
1879-1955

Hendrik A. Lorentz
1853-1928

In einem **Minkowski-Diagramm** ist die Zeit t gegen eine Ortskoordinate x so aufgetragen, dass eine Steigung von $\Delta t/\Delta x = 1$ der Lichtgeschwindigkeit entspricht, z.B. Zeit in Jahren, Strecke in Lichtjahren. Die Bereiche in Vergangenheit und Zukunft, die mit dem Koordinatenursprung in Verbindung stehen können (z.B. durch Lichtsignale), werden "Lichtkegel" genannt. Mit solchen Diagrammen können Aussagen der speziellen Relativitätstheorie veranschaulicht werden.

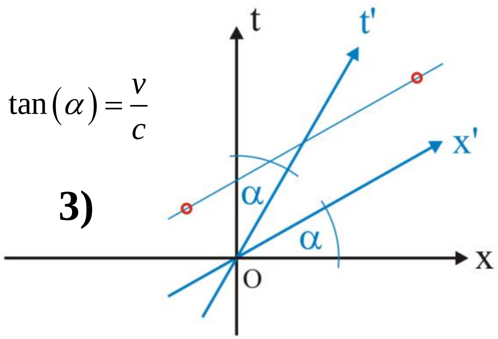


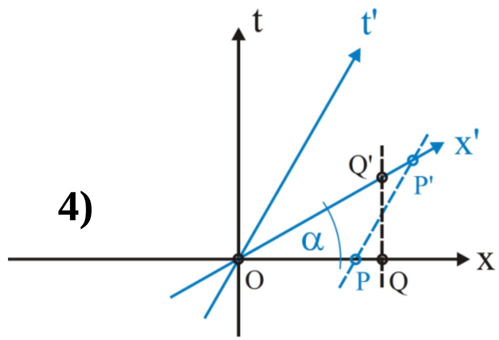




1) Zwei Ereignisse sind für mich gleichzeitig, wenn zwei gleichzeitig am Ursprung ausgesandte Lichtpulse sich gleich weit zum Ereignis bewegt haben (OA = OB).

2) Zwei Ereignisse, die für einen bewegten Beobachter gleichzeitig sein müssen (OA' = OB'), sind für mich nicht gleichzeitig.





3) Aus den beiden obigen Ereignissen kann ich die x'-Achse rekonstruieren*, auf der alle Ereignisse liegen, die für den bewegten Beobachter zum Zeitnullpunkt geschehen (die er als "jetzt" bezeichnen würde).

*Die Gleichheit der beiden mit a bezeichneten Winkel ergibt sich aus dem gleichschenkligen Dreieck in 2b)

4) Zwei gleich lange Stäbe erscheinen im jeweils anderen System verkürzt. Das linke Ende der Stäbe sei zur Zeit null in O, das rechte Ende des in meinem System ruhenden Maßstabs ist Q bzw. Q', das rechte Ende des bewegten Maßstabs ist P bzw. P'. Maßgeblich für die Länge des Stabs ist, wo das rechte Ende "jetzt" ist, also für mich entlang der x-Achse, für den bewegten Beobachter entlang der x'-Achse. Wenn der Verkürzungsfaktor OP/OQ in meinem System nicht gleich dem Faktor OQ'/OP' im bewegten System wäre, dann wäre ein System vor dem anderen ausgezeichnet.

Konsequenzen (Kinematik)

- Addition von Geschwindigkeiten *u* und *v* darf nicht *c* überschreiten. Beispiel:
  Ein Raumschiff fliegt mit Geschwindigkeit *v* an meinem vorbei. In entgegengesetzte Richtung passiert mich ein Meteorit mit Geschwindigkeit u. Im anderen Raumschiff ist die Geschwindigkeit des Meteoriten gegeben durch die Wegdifferenz entlang dessen "jetzt"-Achse geteilt durch die Zeitdifferenz entlang dessen "hier"-Achse. Mit etwas Geometrie (Sinussatz etc., z.B. Gerthsen, Physik):

$$w = \frac{v+u}{1+v\cdot u/c^2}$$

Für den Grenzfall $u = c$ erhält man $w = \frac{v+c}{1+v\cdot/c} = c\frac{v+c}{c+v} = c$

- Zeitdilatation (wie mit der Lichtuhr bereits qualitativ beschrieben: Uhren gehen für mich im anderen Raumschiff langsamer

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma\cdot\Delta t$$

Aus der Sicht des anderen Raumschiffs geht meine Uhr langsamer.

- Längenkontraktion (vgl. Minkoswski-Diagramm letzte Seite): Maßstäbe erscheinen wechselseitig verkürzt

$$\Delta x = \Delta x\cdot\sqrt{1-v^2/c^2} = \Delta x/\gamma$$

- Es gibt einen relativistischen Doppler-Effekt, z.B. erscheint die Strahlung einer Quelle, die sich entfernt, rotverschoben (kleinere Frequenz)

$$f' = f\cdot\sqrt{\frac{c-v}{v+c}}$$

Anmerkung: Rot- und Blauverschiebung findet man nicht nur bei Sternen, sondern auch bei der sog. kosmischen Hintergrundstrahlung, d.h. man kann eine Relativgeschwindigkeit der Erde gegenüber dem "Universum" angeben.

Konsequenzen (Dynamik)

- **Relativistische Masse:** verhindert, dass man über *c* hinaus beschleunigen kann $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

- **Energie:** Reihenentwicklung der relativistischen Masse $m = m_0 + \dfrac{1}{2} m_0 \cdot \dfrac{v^2}{c^2} + \dfrac{3}{8} m_0 \dfrac{v^4}{c^4} + \ldots$

  Der zweite Term mal c^2 ist die "normale" kinetische Energie.
  Die Summe aller Terme ohne den ersten Term ist die relativistische kinetische Energie.
  Der erste Term ist die Ruheenergie (hängt nicht von der Geschwindigkeit ab). Das heißt

  $E = m \cdot c^2 = m_0 \cdot \gamma \cdot c^2$ ist die Summe aus Ruheenergie und kinetischer Energie.

- **Impuls:** relativistische Masse mal Geschwindigkeit $p = m \cdot v = m_0 \cdot \gamma \cdot v = m_0 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot c$

→ Verschiedene Ausdrücke für die Energie:

$$E = m_0 \cdot \gamma \cdot c^2 = p \frac{c}{\beta} = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 c^2} = m_0 \cdot c^2 + E_{\text{kin}}$$

Woher bekommt man den Lorentzfaktor γ?

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{E}{m_0 \cdot c^2}$$

Beispiele:

(1) Raumschiff fliegt mit $\beta = 0{,}5$ (halbe Lichtgeschwindigkeit) $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}5^2}} = 1{,}155$

(2) Elektron der Energie 1,5 GeV in DELTA.
Die Ruheenergie der Elektronen ist 0,511 MeV.
Der Unterschied zwischen kinetischer und Gesamterengie ist vernachlässigbar.

$$\gamma = \frac{1500 \text{ MeV}}{0{,}511 \text{ MeV}} = 2935$$

Viererimpulse $P = \left(E, c \cdot \vec{p}\right) = \left(E, c \cdot p_x, c \cdot p_y, c \cdot p_z\right)$

Vorschrift für das Quadrat, d.h. Skalarprodukt mit sich selbst (beachte die Minuszeichen!)

$$P^2 = E^2 - c^2 \vec{p}^2 = E^2 - c^2 p_x^2 - c^2 p_y^2 - c^2 p_z^2$$

Vergleich mit dem "relativistischen Energiesatz" zeigt, dass das Skalarprodukt der Ruhenergie entspricht , also eine sog. Invariante ist (die Ruhemasse hängt nicht vom Bezugssystem ab)

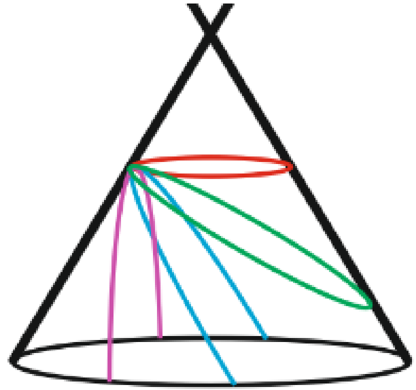
$$E^2 - c^2 \vec{p}^2 = m_0^2 c^4$$

Wenn mehrere Teilchen beteiligt sind bildet man den Vierervektor aus der Summe aller beteiligter Energien und Impulse, dessen Quadrat als "invariante Masse" (multipliziert mit c^2) bezeichnet wird. Hiermit können Teilchenreaktionen berechnet werden, z.B. die Erzeugung von Antiprotonen, siehe Blatt 8, Aufgabe 2.

Wiederholung: Keplersche Gesetze

1. Keplersches Gesetz

Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.



Kegelschnitte

$\varepsilon = 0$:	Kreis $r(\varphi)$ konstant
$0 < \varepsilon < 1$:	Ellipse
$\varepsilon = 1$:	Parabel
$\varepsilon > 1$:	Hyperbel
$\varepsilon < 0$?	andere in der Literatur verwendete Konvention, entspricht $\varphi_1 = \pi$, Kegelschnitte gespiegelt

Allgemeiner: Abstand vom Zentralgestirn

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$$

2. Keplersches Gesetz

Der "Fahrstrahl" von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Ergibt sich aus der Drehimpulserhaltung $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right| = \frac{|\vec{L}|}{2\mu} = \text{const.}$$

3. Keplersches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen.

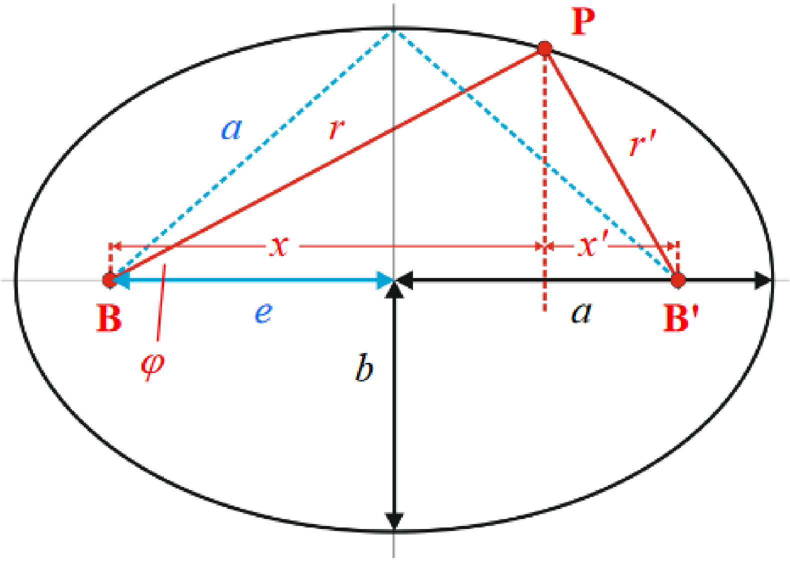
$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Insbesondere das 3. Gesetz gilt nur in der Näherung Sonnenmasse >> Planetenmasse.
Zur Erinnerung: Reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

Halbparameter und Exzentrizität:

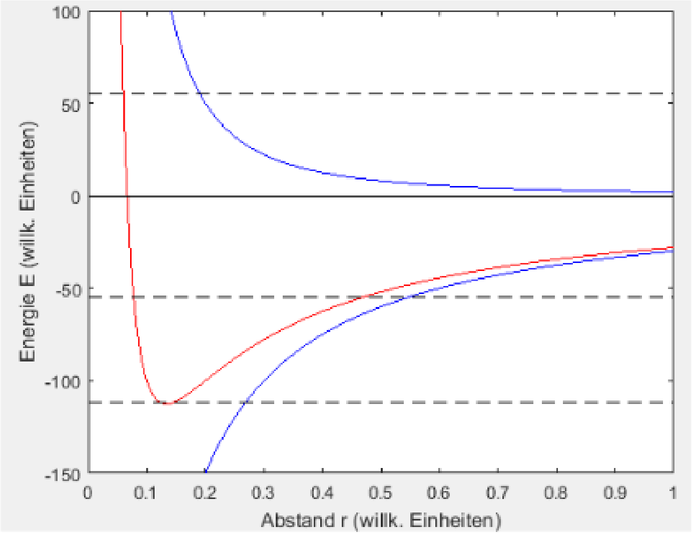
$$p \equiv \frac{L^2}{\mu \cdot \alpha} \qquad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2E \cdot L^2}{\mu \cdot \alpha}}$$



$$p = \frac{b^2}{a} \qquad \varepsilon = \frac{e}{a}$$

Effektives Potenzial:

$$E = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu \cdot r^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \text{const.}$$



Wiederholung: Kreisel

Nützlich: Korrespondenz zwischen linearer und Kreisbewegung

Ort	x [m]	**Winkel**	φ [rad]
Geschwindigkeit	$\vec{v}$ [m/s]	**Winkelgeschwindigkeit**	$\vec{\omega}$ [rad/s]
Beschleunigung	$\vec{a}$ [m/s^2]	**Winkelbeschleunigung**	$\dot{\vec{\omega}}$ [rad/s^2]
Masse	m [kg]	**Trägheitsmoment**	I [kg m^2]
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$ [kg m/s]	**Drehimpuls**	$\vec{L} = I\vec{\omega}$ [kg m^2/s]
kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ [kg m^2/s^2]	**Rotationsenergie**	$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$ [kg m^2/s^2]
Kraft	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\vec{a}$ [kg m/s^2]	**Drehmoment**	$\vec{D} = \dot{\vec{L}} = I\dot{\vec{\omega}}$ [kg m^2/s^2]
lin. Schwingung: Rückstellkraft	$F = -k \cdot x$	**Drehschwingung: Rücktreibendes Drehmoment**	$D = -D_r \cdot \varphi$
Schwingungsdauer	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	**Schwingungsdauer**	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D_r}}$

Kreisel = rotierendes Objekt

Drehimpuls: $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$ $\qquad$ $\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega}$ $\qquad$ $\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega}$

1) Trägheitsmoment als Skalar , nur wenn L parallel zu ω

2) Trägheitstensor $I_{jk} = I_{kj}$ L allgemein nicht parallel zu ω

3) diagonaler Trägheitstensor mit Hauptträgheitsmomenten durch geschickte Wahl des Koordinatensystems

Asymmetrischer Kreisel: alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden

Symmetrischer Kreisel: mindestens zwei Hauptträgheitsmomente gleich, muss aber nicht rotationssymmetrisch sein (z.B. Form einer quadratischen Säule)

Kräftefreier Kreisel

Allgemein: Drehachse ≠ Drehimpulsachse ≠ Hauptträgkeitsachse → Nutation
z.B. Wanderung der Erdachse
(kleiner Effekt)

Klausurrelevanter Spezialfall: Drehachse = Drehimpulsachse = Hauptträgkeitsachse

Kreisel unter dem Einfluss von Kräften (Drehmoment)

Einfluss eines äußeren Drehmoments: Präzession z.B. Bewegung der Erdachse (Periode 26000 Jahre).

Beispiel: Schräger Kreisel (idealisiert)

Drehmoment: $\vec{D} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times m \cdot \vec{g}$

Frequenz der Präzession: $\omega_p = \dfrac{m \cdot g \cdot r}{I \cdot \omega}$

Idealisiert betrachtet weicht die Drehimpulsachse einem Drehmoment senkrecht zur wirkenden Kraft aus. In Wirklichkeit ist es etwas komplizierter. Es ist z.B. anschaulich klar, dass dies bei beliebig kleiner Winkelgeschwindigkeit nicht stimmen kann (vgl. Argumentation mit der Corioliskraft im Skript).

Nabla Teil II

$$\vec\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

1.) $\vec\nabla\cdot\vec A = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z =$ "Zahl" (x,y,z)

Divergenz

$\vec A = (A_x, A_y, A_z)$ Vektorfeld

$$\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\vec\nabla\vec A), \frac{\partial}{\partial y}(\vec\nabla\vec A), \frac{\partial}{\partial z}(\vec\nabla\vec A)\right)$$

Gradient

2.) Sei $\vec A$ beliebig

$$\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) = \sum_{i=1}^{3}\partial_i(\vec\nabla\times\vec A)_i$$

Divergenz (Vektor)

$\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i$

$i = 1,2,3$
$\quad x,y,z$

$$= \partial_i\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{antisymmetrisch}}\,\underbrace{\partial_i\partial_j}_{\text{symmetrisch}}A_k = 0 \qquad i \leftrightarrow j$$

3.) $\underbrace{\vec\nabla\cdot\vec\nabla}_{\Delta}\phi$ $\qquad \phi$: Skalarfeld

$$= \partial_i\partial_i\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$$

Resonanz, erzwungene Schwingungen

$$m\ddot y + \lambda\dot y + ky = F_E(t)$$

allg. Lösung: $y^{hom}_{allg} + y^{inhom}_{spez}$

$F_E(t) = F_0\,e^{i\omega_E t}$, $F_0, \omega_E = \text{const}$

Ansatz: $y(t) = C\,e^{i\omega_E t}$

Amplitude, komplex

Gleichung für C

$$\Rightarrow \left(-\omega_E^2 + i\frac{\lambda}{m}\omega_E + \overbrace{\frac{k}{m}}^{\omega_0^2}\right)\cdot C = \frac{F_0}{m}$$

$$C = \mathrm{Re}\,C + i\,\mathrm{Im}\,C = |C| \cdot e^{i \arg C}$$

$$= \frac{F_0}{m}\left(\frac{1}{-\omega_E^2 + 2i\gamma\omega_E + \omega_0^2}\right) = \frac{F_0}{m}\cdot A$$

$$A = \frac{1}{-\omega_E^2 + 2i\gamma\omega_E + \omega_0^2}$$

$$|A| = \sqrt{A A^*} = \left(\frac{1}{-\omega_E^2 + 2i\gamma\omega_E + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{-\omega_E^2 - 2i\gamma\omega_E + \omega_0^2}\right)^{1/2}$$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2}}$$

wenn γ klein ist, passiert für $\omega_E \to \omega_0$ "Resonanzkatastrophe" $\to y \to \infty$

$$\tan\delta = \frac{\mathrm{Im}\,A}{\mathrm{Re}\,A} = \frac{-2\gamma\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}$$

↑ Phase von A

$$y^{inh}_{spez}(t) = \frac{F_0}{m}\,|A|\,e^{i(\omega_E t + \delta)}$$

Kurvendiskussion von $|A|$ → $|A|$ wird maximal für $\omega_E = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$