

Isentropen Eulergleichungen

$$\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\nabla \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \right\|$$

Bernoulli's Gleichung

Betrachte eine stationäre Strömung, d.h. $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ ist zeitlich konstant. (keine Statik, denn es gibt Strömung $\vec{v} \neq 0$). Es gilt dann

$$\vec{v} \times (\underbrace{\nabla \times \vec{v}}_{\vec{a}}) = \nabla \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \quad \otimes \otimes$$

Multipliziere diese Gleichung von links mit \vec{v} . $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{a}) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \vec{v} \cdot \nabla \left(w + \frac{v^2}{2} \right)$$

invariant für kleine Verschiebungen in Richtung von \vec{v} .

Bei stationärer Strömung sind alle Verschiebungen (= Bahnen) entlang Stromlinien. Es folgt: $\left\| w + \frac{v^2}{2} = \text{const} \right\|$ (entlang Stromlinien)

(Bernoulli's Gleichung)

* Die Konstante kann i. A. unterschiedlich sein, aber ist konstant für eine bestimmte Stromlinie.

Vorteil: Information über System ohne DGL lösen zu müssen (nichtlinear!)

Energieerhaltung

Unter Einfluss einer konservativen Kraft mit Potential u wird die Bernoulli Gleichung zu:

$$\underbrace{w}_{(1)} + \underbrace{u}_{(2)} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{(3)} = \text{const} = \varepsilon \quad (\text{entlang Stromlinie})$$

(1) Enthalpie, Druckterm des äußeren Kräfte, denn $w = \int \frac{dp}{\rho(p)}$
 (2) Potentialdichte (3) kinetische Energiedichte "Staudruck"

"Energieerhaltung" für inentropie, stationäre (ideale) Strömung

Für inkompressible Flüssigkeit $\rho = \text{const}$

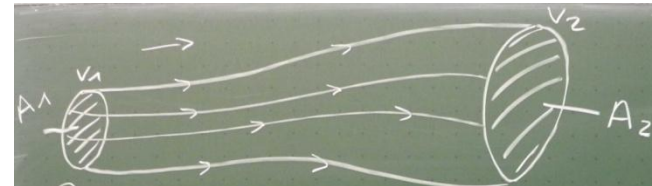
$$\Rightarrow w = \frac{P}{\rho}$$

$$\Rightarrow \rho g = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \cdot u + p = \text{const} \quad \text{"Energiedichte-bilanz"}$$

Falls gilt $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ heißt die Strömung Potentialströmung oder wirbelfrei.

Dann folgt mit $\vec{\nabla}(\epsilon) = 0$, d.h., die Energiedichte ist im gesamten Volumen konstant (und nicht von der betrachteten Stromlinie abhängig).

Wir können auf einfache Art und Weise den Energiesatz (Bernoulli) herleiten.



$S_1 u_1$ Rohrwall = Strömungslinien $S_2 u_2$

Zeitpunkt Δt später $l_1 = v_1 \Delta t$ $l_2 = v_2 \Delta t$



Massenerhaltung: Massenzufluß durch A_1 = Massenabfluß bei A_2

$$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

$$\Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Falls $\rho = \text{const} \Rightarrow v \propto \frac{1}{A}$

Wir berechnen die vom Flüssigkeitsdruck verrichtete Arbeit pro Masse ΔM

$$(P_1 A_1 v_1 \Delta t - P_2 A_2 v_2 \Delta t) \frac{1}{\Delta M} = \bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2$$

Differenz der Arbeit durch Druck

= Differenz der kinet. und pot. Energie

$$\bar{\epsilon} = \frac{v^2}{2} + u \quad \text{Energie pro Masse der Flüssigkeit}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} = \bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2$$

Nabla in kartesischen Koordinaten

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \vec{r} = (x, y, z) \quad \text{"1, 2, 3"}$$

Konservative Kraft $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$; $\phi = \phi(x, y, z)$ "Potential"

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_i = \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla})_j (\vec{F})_k = \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla})_j (\vec{\nabla})_k \phi = 0$$

antisymmetrisch $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$ symmetrisch in $j \leftrightarrow k$

$i=1$, d.h., $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ in x-Richtung = 0

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_{i=1} = \epsilon_{123} (\vec{\nabla})_2 (\vec{\nabla})_3 \phi + \epsilon_{132} (\vec{\nabla})_3 (\vec{\nabla})_2 \phi = 0$$

Ergänzungen zur Hydrodynamik

Fluide = Flüssigkeiten oder Gase

- ideale Fluide
- reale Fluide mit "innerer Reibung", ausgedrückt durch die sog. Viskosität

Strömungen von Flüssigkeiten, d.h. räumliche Verteilung des Geschwindigkeitsvektors, Dichte konstant

- laminare Strömung, "wohlgeformte" Geschwindigkeitsverteilung, nicht turbulent
- turbulente Strömung, Bildung von Wirbeln, z.T. chaotisch (Verlauf schwer vorhersagbar)
vgl. reale Verhältnisse in Rohren, Umgebung von Fahr-/Flugzeugen, Wettergeschehen

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \quad \text{Euler-Gleichung (ideale Flüssigkeit)}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u} \quad \text{Navier-Stokes-Gleichung (Flüssigkeit mit Viskosität } \eta \text{)}$$

Differentialgleichung 2. Ordnung, nichtlineare Abhängigkeiten

hier: Laplace-Operator $\Delta \equiv \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ auf einen Vektor angewandt:

$$\Delta \vec{u} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \vec{e}_x + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \vec{e}_y + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \vec{e}_z$$

Physik II: Laplace-Operator auf einen Skalar (elektrisches Potenzial) angewandt ist auch ein Skalar, der proportional zur Dichte der elektrischen Ladung ist.

Viskosität η oder Zähigkeit (zur Erinnerung, vgl. Transportphänomene)

Zähes Fluid zwischen zwei Platten, linke Platte bei $x = 0$. Die rechte Platte bei $x > 0$ wird in z -Richtung verschoben. Die hierfür notwendige Kraft pro Fläche ist

$$\frac{F_z}{A} = \eta \cdot \frac{du_z}{dx}$$

Die Reibungskraft ist $-F_z$ entgegen der Geschwindigkeit.

In diesem Beispiel variiert die Geschwindigkeit u linear zwischen den Platten.

$$[\eta] = \text{Pa} \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Allgemeiner:

Betrachte drei scheibenförmige Flüssigkeitselemente der Dicke dx , das mittlere bei x_0 .

Kraft in z -Richtung auf das mittlere Element:

$$dF_z = \eta \cdot dy \cdot dz \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial x} \left(x_0 + \frac{dx}{2} \right) - \frac{\partial u_z}{\partial x} \left(x_0 - \frac{dx}{2} \right) \right\}$$

Bei linearer Variation der Geschwindigkeit wäre die Kraft null, aber mit

$$u_z \left(x_0 + \frac{dx}{2} \right) \approx u_z(x_0) + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \quad \text{gilt} \quad dF_z = \eta \cdot dy \cdot dz \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u_z - \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right\}$$

$$= \eta \cdot dy \cdot dz \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \eta \cdot dV \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$$

In drei Dimensionen: **Dritter Term auf der rechten Seite der Navier-Stokes-Gleichung**

$$d\vec{F} = \eta \cdot dV \cdot \Delta \vec{u} \quad \rightarrow \quad d\vec{a} = \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{d\vec{F}}{\rho \cdot dV} = \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u}$$

Einfache, aber wichtige Anwendung: Strömung in einem Rohr (z.B. Wasserleitung, Pipeline, Blutgefäß).

Laminare Strömung in einem Rohr mit Radius R :

Reibungskraft für einen Flüssigkeitszylinder der Länge L und Radius $r = \text{Druckgefälle} \cdot \text{Stirnfläche}$

$$-\eta \cdot 2\pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{du}{dr} = \pi \cdot r^2 \cdot \Delta p \quad \rightarrow \quad du = -\frac{\Delta p}{2\eta \cdot L} r \cdot dr$$

$$u(r) = -\frac{\Delta p}{2\eta \cdot L} \int r \cdot dr = -\frac{\Delta p}{4\eta \cdot L} (r^2 + C) = \frac{\Delta p}{4\eta \cdot L} (R^2 - r^2) \quad \leftarrow \quad u(R) = 0 \quad C = -R^2$$

Parabolische Geschwindigkeitsverteilung mit Scheitel im Rohrmittelpunkt.

Durchflussgeschwindigkeit (Volumen pro Zeiteinheit)

$$\frac{V}{t} = 2\pi \int_0^R r \cdot u(r) \cdot dr = \frac{2\pi \cdot \Delta p}{4\eta \cdot L} \int_0^R (R^2 r - r^3) \cdot dr = \frac{\pi \cdot \Delta p}{2\eta \cdot L} \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R$$

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\eta \cdot L} R^4$$

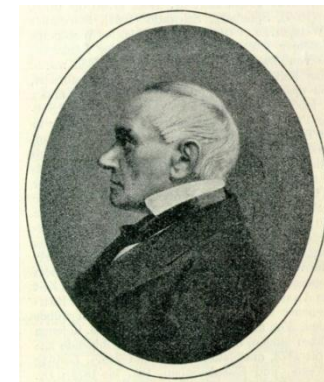
Hagen-Poiseuille-Gesetz

Die Viskosität hängt stark von der Temperatur ab:

z.B.	Wasser	Glyzerin
20°C	1,00 mPa s	1480 mPa s
40°C	0,65 mPa s	238 mPa s
60°C	0,47 mPa s	81 mPa s



Jean Poiseuille
(1797 – 1896)



Gotthilf Hagen
(1797 – 1884)

Zirkulation und dynamischer Auftrieb

Wenn ein Fluid ein Hindernis umströmt, bilden sich oberhalb einer Grenzgesewindigkeit Wirbel. Die Rotationsgeschwindigkeit nimmt mit dem Abstand vom Zentrum linear zu (wie beim starren Körper). Außerhalb dieses "Wirbelkerns" nimmt sie wieder ab.

Die sog. Zirkulation ist definiert als $Z = \oint u \cdot ds$

Der **Satz von Kutta-Joukowski** besagt, dass der Auftrieb eines Flugzeugflügels gegeben ist durch

$$F_A = \rho \cdot u_\infty \cdot Z \cdot L$$

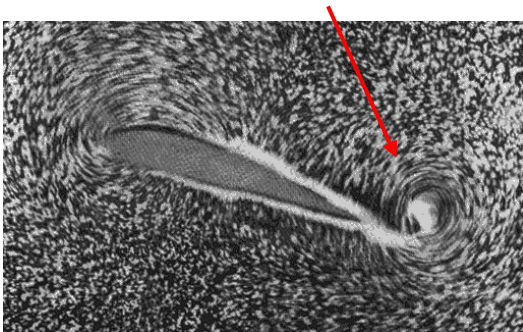
wobei ρ die Dichte des Fluids, u_∞ die ungestörte Strömungsgeschwindigkeit und L die Spannweite ist.

Vergleich mit der Bernoulli-Gleichung für verschiedene Geschwindigkeit unter und über dem Flügel:

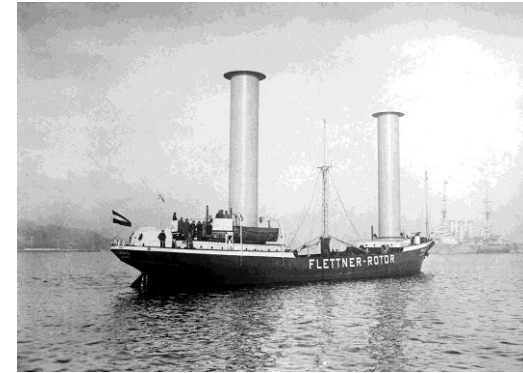
$$F_A = \Delta p \cdot A = \frac{1}{2} \rho \cdot (u_o^2 - u_U^2) \cdot A = \frac{1}{2} \rho \cdot (u_o + u_U) \cdot (u_o - u_U) \cdot B \cdot L = \rho \cdot \bar{u} \cdot (u_o - u_U) \cdot B \cdot L$$

Wenn kann man die Geschwindigkeitsdifferenz mal der Flügelbreite mit der Zirkulation identifiziert, ergibt sich der obige Satz. Die "Herleitung" mit der Bernoulli-Gleichung ist hier sehr grob (dem wird in der Literatur mit einem Auftriebsbeiwert c_A Rechnung getragen).

Ohne Reibung ist die Zirkulation konstant, d.h. einzelne Wirbel entstehen und vergehen nicht. In der Tat beobachtet man (z.B. im Windkanal) an der Hinterkante einer Tragfläche, die in Bewegung gesetzt wird, einen sog. "Anfahrwirbel", dessen Zirkulation der des Flügels entgegengesetzt ist.



Ein Auftrieb durch Zirkulation $Z \neq 0$ kann auch durch Rotation eines Körpers erzeugt werden. Das ist der sog. Magnus-Effekt (Heinrich Gustav Magnus, 1802 – 1870). Beispiele sind die seitliche Ablenkung eines rotierenden Fußballs (sog. Bananenflanke) oder Auftrieb durch rotierende Zylinder, sog. Flettner-Rotoren, die bereits in den 1920er Jahren als Schiffsantrieb versuchsweise eingesetzt wurden.



MS Buckau mit Flettner-Rotoren (1924). Der Vortrieb ist optimal, wenn der scheinbare Wind genau von der Seite kommt.

Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung

Das Umschlagen einer Strömung von laminar nach turbulent hängt geschicht oberhalb einer bestimmten Grenzgeschwindigkeit, die aber von anderen Größen abhängt. Die Reynolds-Zahl erlaubt, diese Grenzgeschwindigkeit abzuschätzen und größere Objekte (z.B. Schiffe, Flugzeuge) auf kleinere Modelle mit ähnlichem Turbulenzverhalten zu skalieren.

Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\rho}{\eta} \cdot U \cdot L$$

Hier gehen neben der Dicht und Viskosität des Fluids eine charakteristische Geschwindigkeit U und eine charakteristische Länge L ein. Der Übergang von laminar nach turbulent beginnt oberhalb ca. $Re \approx 2000$. Mit

$$Re = \frac{\rho}{\eta} \cdot U \cdot L = \frac{\rho \cdot L^3 \cdot U^2}{\eta \cdot L^2 \cdot U}$$

ergibt sich eine physikalische Interpretation: Der Zähler ist die doppelte kinetische Energie des Fluids mit Volumen L^3 , der Nenner ist die Reibungsenergie (Reibungskraft einer Fläche L^2 entlang einer Strecke L).