Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \vec{\nabla}\vec{v} = 0$$

Eulergleichungen "$\vec{F} = m\vec{a}$"

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g}$$

Adiabatengleichung

Ideale Flüssigkeit = kein Wärmeaustausch
d.h., die Strömung ist überall adiabatisch
(konstante Entropie)

(1) $\frac{ds}{dt} = 0$, wobei s die spezifische Entropiedichte, also Entropie pro Masseneinheit, darstellt

Mit $\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})s$ (Identität totale Ableitung)

folgt mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\cdot s) + \vec{\nabla}(\underbrace{\rho s \vec{v}}_{\text{Entropiestromdichte}}) = 0 \qquad (2)$$

denn $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\cdot s) = \rho\frac{\partial s}{\partial t} + s\frac{\partial \rho}{\partial t}$ und
$\vec{\nabla}(\rho s\vec{v}) = \rho\vec{v}\,\vec{\nabla}s + s\,\vec{\nabla}(\rho\vec{v})$) Produktregel

Damit folgt $\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho s\vec{v})$

$$= \underbrace{\rho\frac{\partial s}{\partial t}}_{\overset{(1)}{=}-(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})s} + \underbrace{s\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{-\vec{\nabla}(\rho\vec{v})\ \text{(Kont. gleichung)}} + \rho\vec{v}\,\vec{\nabla}s + s\,\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0 \ ✓$$

(1),(2) sind äquivalente Formen der Adiabatengleichung

Spezialfall: Isentrope Bewegung

Sei bei $t=t_0$ die Entropie in allen Punkten des Flüssigkeitsvolumens gleich, $s(\vec{r}, t=t_0) = \text{const}$ (von $\vec{r}$ unabhängig)
so bleibt sie dies für alle Zeiten t
da $\frac{ds}{dt} = 0$ (3) $\boxed{s(\vec{r}, t) = \text{const}}$ Adiabatengleichung

Mit $s = \text{const}$ (3) lassen sich die Eulergleichungen vereinfachen. Betrachte die Enthalpie $w = w(s,p)$

$dw = T\,ds + V\,dp$; $V = \frac{1}{\rho}$ das spezifische Volumen

$$\Rightarrow \vec\nabla w = T \underbrace{\vec\nabla s}_{=0} + \frac{1}{\rho}\vec\nabla p \quad \Rightarrow \boxed{\vec\nabla w = \frac{\vec\nabla p}{\rho}}$$

→ in Eulergleichung eingesetzt.

$$\frac{\partial \vec v}{\partial t} + \underline{(\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v} = -\vec\nabla w$$

; Benutze die Identität: (I)

$$\frac{1}{2}\vec\nabla(v^2) = \vec v\times(\vec\nabla\times\vec v) + \underline{(\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec v}{\partial t} - \vec v\times(\vec\nabla\times\vec v) = -\vec\nabla\left(w + \frac{v^2}{2}\right)$$

; Nehme hiervon die Rotation

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\vec\nabla\times\vec v) - \vec\nabla\times\left[\vec v\times(\vec\nabla\times\vec v)\right] = 0 \right\| \quad (xy)$$

Die rechte Seite von (xy) verschwindet auch falls es zusätzliche konservative Kräfte gäbe. Die Gleichung ist eine reine Gleichung in $\vec v$! nichtlinear.

Beweis der Identität (I):

Was nicht zum Ziel führt: Formeln vom Typ $\vec a\times(\vec b\times\vec c) = \ldots$ $\quad \vec v = (v_1, v_2, v_3)$

$$(\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v = \frac{1}{2}\vec\nabla(v^2) - \vec v\times(\vec\nabla\times\vec v)$$

linke Seite, in Komponenten: $v_l\,\partial_l\,v_k$

$\frac{\partial}{\partial x_l} = \partial_l$, $l = 1,2,3$ (Summen-Konvention) $k = 1,2,3$

rechte Seite

$$\frac{1}{2}\partial_k v_l v_l - \varepsilon_{klm} v_l (\vec\nabla\times\vec v)_m$$

$$= \frac{1}{2}\partial_k v_l v_l - \underline{\varepsilon_{klm}} v_l \underline{\varepsilon_{mxy}} \partial_x v_y$$

Sei z.B. $k=1$:

$$\left(\sum_l v_l\,\partial_l\right)v_1 = \left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)v_1$$

$$\vec v\cdot\vec\nabla \neq \vec\nabla\cdot\vec v$$

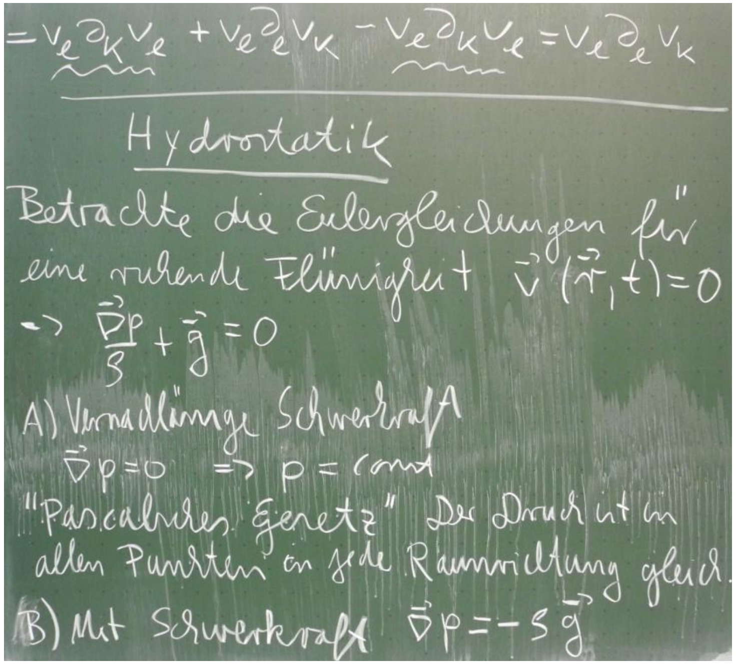
Kreuzprodukt: $(\vec a\times\vec b)_k = \varepsilon_{klm}\,a_l\,b_m$

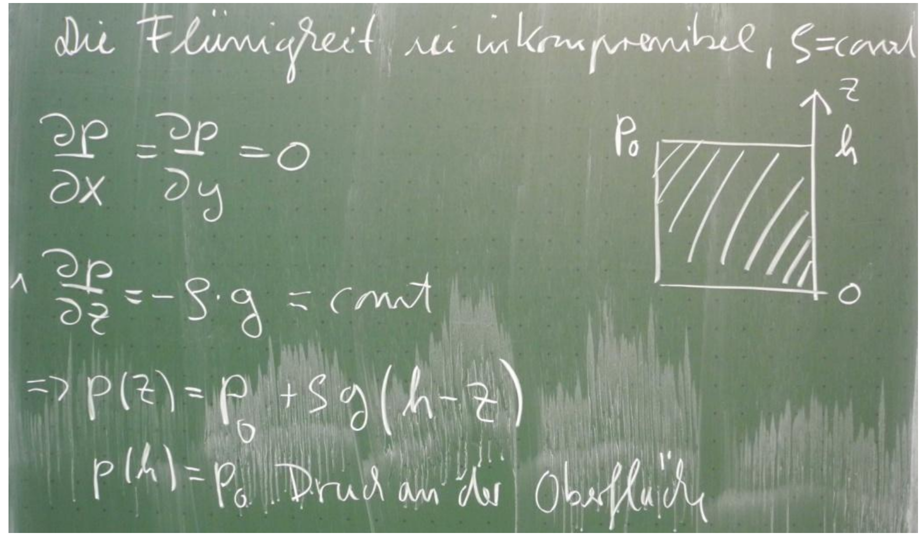
Formel: $\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mxy} = -\varepsilon_{mlk}\varepsilon_{mxy}$ → Textbuch

$$= -\left[\delta_{lx}\delta_{ky} - \delta_{ly}\delta_{kx}\right]$$

Einsetzen rechte Seite

$$= \frac{1}{2}\underbrace{v_l\partial_k v_l \cdot 2}_{\text{Produktregel}} + v_l\partial_x v_y\left[\delta_{lx}\delta_{ky} - \delta_{ly}\delta_{kx}\right]$$

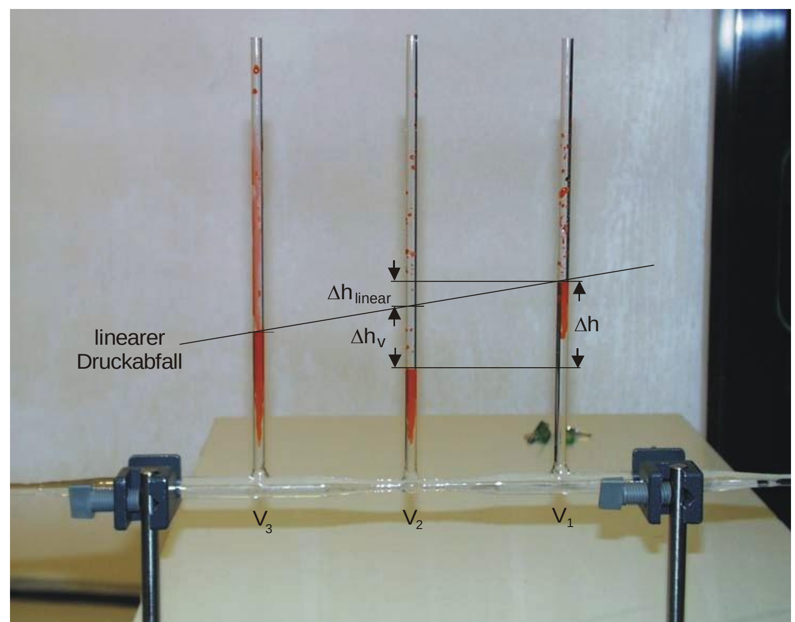




Experimente zur Bernoulli-Gleichung

Gemäß der Kontinuitätsgleichung ist die Geschwindigkeit v_2 eines Fluids in einem Rohr an einer Engstelle höher als die Geschwindigkeit v_1 davor und v_3 danach.

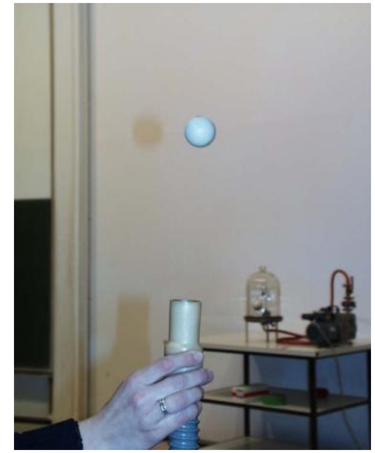
Die Bernoulli-Gleichung (s. nächste Vorlesung) besagt, dass bei höherer Geschwindigkeit der Druck niedriger ist. Dies lässt sich an der Steighöhe in den Druckmessröhrchen senkrecht zur Flussrichtung ablesen. Aufgrund von Reibung wird ferner ein linearer Druckabfall in Flussrichtung beobachtet.



Weitere Experimente zur Bernoulli-Gleichung

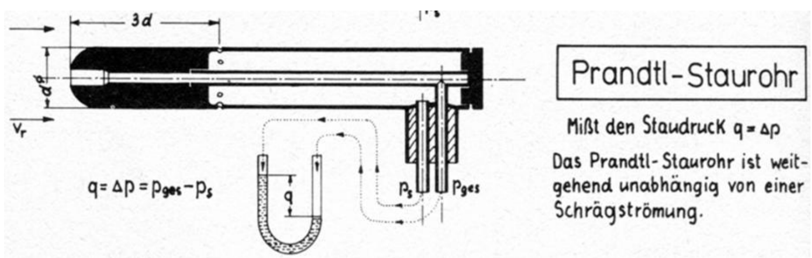
- Eine Metallplatten mit einer Öffnung in der Mitte ist an eine Pressluftleitung angeschlossen ist. Eine zweite Platte wird vom Luftstrom nicht abgestoßen, sondern aufgrund des Untersdrucks angesaugt (hydrodynamisches Paradoxon).

- Ein Trichter wird die Pressluftleitung angeschlossen. Ein Tischtennisball schwebt im nach oben gerichteten Luftstrom. Wird er in den Trichter gedrückt, wird er angesaugt und fällt auch nicht heraus, wenn der Trichter umgedreht wird.



Windkanal

Im Luftstrom aus einem Gebläse werden verschiedene Körper so aufgehängt, dass sowohl der Strömungswiderstand als auch der aerodynamische Auftrieb mit je einem Federkraftmesser abgelesen werden kann. Der Strömungswiderstand hängt von der Form des Körpers ab (z.B. spitz oder stumpf).
Ein gebogenes Blech erfährt mit zunehmendem Anstellwinkel (Winkel zwischen der Sehne des Bogens und der Richtung des Luftstroms) zunächst einen stark zunehmenden Auftrieb und ein langsames Anwachsen des Strömungswiderstands. Bei großem Anstellwinkel wächst der Widerstand weiter, während der Auftrieb abnimmt (vgl. Polardiagramm).
Beim Prandtl-Staurohr wirken Staudruck + statischer Druck von einer Seite und der statischer Druck von der anderen Seite auf eine Flüssigkeit in einer Kapillare, deren Steighöhe somit ein Maß für die Strömungsgeschwindigkeit ist.



Luftkanone

Ein Gummiband schlägt auf eine Membran, die über einen Plastikeimer gespannt ist. Aus einem kreisförmigen Loch im Boden des Eimers tritt ein toroidförmiger Luftwirkel aus, der eine Kerze ausbläst.