Statistische Herangehensweise aus mikroskopischem Bild:

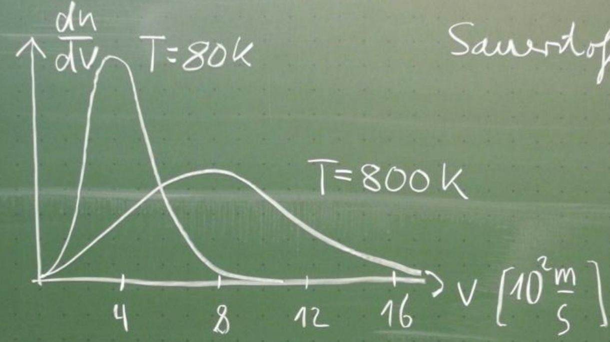
N Teilchen mit Energie $\varepsilon_i = \frac{1}{2} m v_i^2$

[i.A. $V_{pot}(x_i)$, aber hier: freie Teilchen <=> ideales Gas]

Zentral: Maxwell-Boltzmann-Verteilung | $|\vec{v}| = v$

Anzahl der Teilchen mit Geschwindigkeitsbetrag zwischen v und dv $= \frac{dn}{dv} = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

k: Boltzmannkonstante $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$



Je heißer, desto höher die Teilchengeschwindigkeiten!

Fläche unter der Kurve $= \int dn = N$, d.h., $\frac{dn}{dv}$ ist normiert!

Beweis: $N = \int_0^\infty dn \overset{?}{=} 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty dv\, v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

Substitution: $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\, z$; $dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\, dz$

$$\Rightarrow \int_0^\infty dn = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{2kT}{m}}^{\,3} \underbrace{\int_0^\infty dz\, z^2 e^{-z^2}}_{\text{Bronstein}\ \frac{\sqrt{\pi}}{4}}$$

$$= 4\pi N \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = N \quad ✓$$

Integraltrick für $\int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = I = ?$

$\int_0^\infty dy\, e^{-y^2} = I$

$$\Rightarrow I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty dx\, dy\, e^{-(x^2+y^2)}$$

Übergang zu Polarkoordinaten

$x, y \rightarrow r, \varphi$ (I. Quadrant)

$$I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\varphi\, r\, e^{-r^2} = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2}$$

Substitution $r^2 = q$; $dq = 2r\, dr$

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{2} \cdot e^{-q} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x^2}$ durch $I(\alpha) \equiv \int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \frac{1}{2}$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -\int_0^\infty dx\, x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}\right]}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(-\frac{1}{2}\alpha^{-3/2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

für $\alpha = 1$ folgt:

$$\int_0^\infty dx\, x^2 e^{-x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \quad //$$

Diskussion der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung

Maximal bei v_{max}: $\frac{d}{dv}\left(\frac{dn}{dv}\right) = \left[2v + v^2\left(-\frac{m}{2kT}\cdot 2v\right)\right]\cdot \text{Rest} \overset{!}{=} 0$

Die Verteilung $\frac{dn}{dv}$ nimmt ihr Maximum bei

$$2v\left(1 - \frac{mv^2}{2kT}\right) = 0$$

an

$$\Rightarrow v_{max}^2 = \frac{2kT}{m} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

mittlere Geschwindigkeit

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty dv\, v \frac{dn}{dv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty dv\, v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}_{\text{Bronstein } \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Anzahl der Teilchen mit Geschwindigkeitsbetrag zwischen v und dv:

$$\frac{dn}{dv} = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

rms "root mean squared"

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N}\int_0^\infty dv\, v^2 \frac{dn}{dv}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$v_{max} < \langle v \rangle < v_{rms}$$

Schwankung einer Verteilung:

$$\sigma^2 = \underbrace{\langle v^2 \rangle}_{v_{rms}^2} - \langle v \rangle^2 = \frac{3kT}{m} - \frac{8kT}{\pi m} \simeq \frac{kT}{2m}$$

Einschub: Verteilungsfunktionen und Wahrscheinlichkeit

Diskrete Merkmale $i = 1, 2, \ldots, N$

p_i: Wahrscheinlichkeit für dieses Merkmal i

Normierung: $\sum_{i=1}^N p_i = 1$

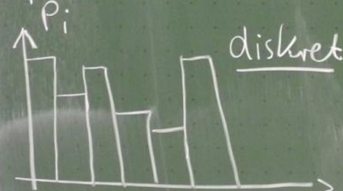
Mittelwert von Größe x: $\langle x \rangle = \sum_{i=1}^N p_i x_i$

Schwankung: $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \sum_{i=1}^N p_i (x - \langle x \rangle)^2$

$$= \langle x^2 \rangle - 2\sum_{i=1}^N p_i x \langle x \rangle + \sum_{i=1}^N p_i \langle x \rangle^2$$

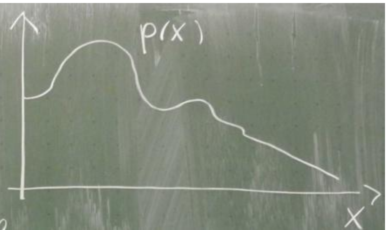
$$= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Bsp: Würfel $p_i = 1/6$



$$\langle f(x) \rangle = \sum p_i \cdot f(x_i)$$

→ Kontinuierliche Verteilung



Normierung: $\int_0^\infty dx\, p(x) = 1$

Momente, Erwartungswerte analog.

Herleitung der Maxwell-Boltzmann-Verteilung

N identische Atome, $N \gg 1$, mit Energie ε_i

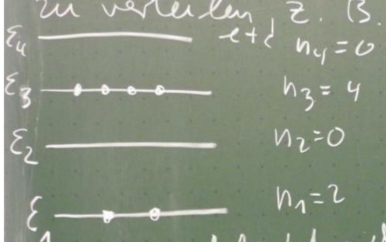
n_i: Besetzungszahl = Anzahl Atome mit Energie ε_i

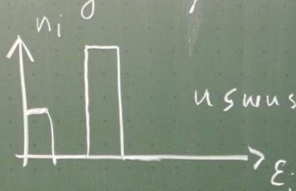
Es gilt: $\sum n_i = N$ Teilchenzahl

sowie $\sum n_i \varepsilon_i = U$ innere Energie

sind konstant (X)

Viele Möglichkeiten, Atome auf Energieniveaus ε_i zu verteilen, z. B.





usw usf

Das System befindet sich im statistischen Gleichgewicht, wenn die wahrscheinlichste Verteilung realisiert ist.

Die wahrscheinlichste Verteilung ist diejenige, welche die größte Anzahl verschiedener Möglichkeiten besitzt, diese zu realisieren.

Beispiel: 5 identische, unterscheidbare Teilchen im 2-Niveausystem ε_2 — n_2, ε_1 — n_1

n_1	n_2	P
5	0	1
4	1	5
3	2	10
2	3	10
1	4	5
0	5	1

wahrscheinlichsten Verteilungen (ohne Berücksichtigung der Nebenbedingung von U (X))

Kombinatorik

$$P = \frac{N!}{n_1!\, n_2!}$$

$N!$ = "N Fakultät"

$N! = N(N-1)!$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1$

$3! = 6$

$4! = 24$

...

$$\frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$