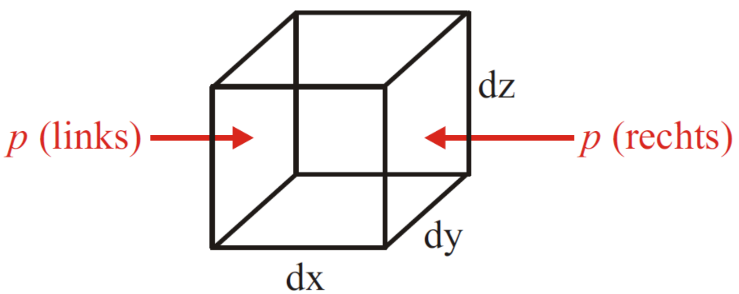
5.3 Ruhende Flüssigkeiten: Hydrostatik

Atome frei und ohne Kraft verschiebbar (ideale Flüssigkeit: Schubmodul $G = 0$)

→ keine Tangentialkräfte an Oberflächen, Oberfläche stets senkrecht zur wirkenden Kraft
→ ohne Schwerkraft: Druck p = Kraft / Fläche im gesamten Flüssigkeitsvolumen gleich
→ mit Schwerkraft: Druck ist in einer horizontalen Schicht gleich

$$p = \frac{F}{A} \qquad (F \text{ senkrecht zu Fläche } A)$$



$$\text{links}: \quad p$$

$$\text{rechts}: \quad p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$\rightarrow \quad F_x = p \cdot dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \cdot dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$$ und analog in y- und z-Richtung

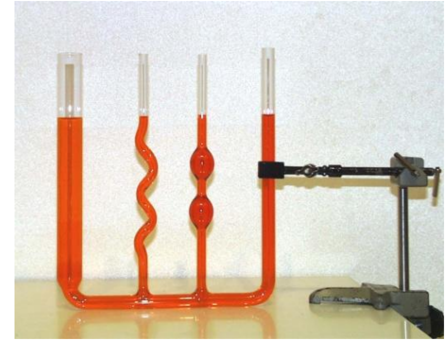
$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -\text{grad } p \cdot dV}$$

Wenn die Flüssigkeit sich so verschoben hat, dass alle Kräfte ausgeglichen sind,
dann ist grad $p = 0$ und der Druck ist überall gleich (ohne Schwerkraft).

Schweredruck = Gewicht der Wassersäule (Höhe h) über einer gegebenen Fläche ($h = 0$)

$$p(0) = \int_0^h \frac{\rho \cdot g}{A} A dz = \rho \cdot g \cdot h$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt für konstante Dichte ρ, was bei der geringen Kompressibilität von Flüssigkeiten gut erfüllt ist (z.B. Wasser: $\kappa = 5 \cdot 10^{-10}$ m²/N)



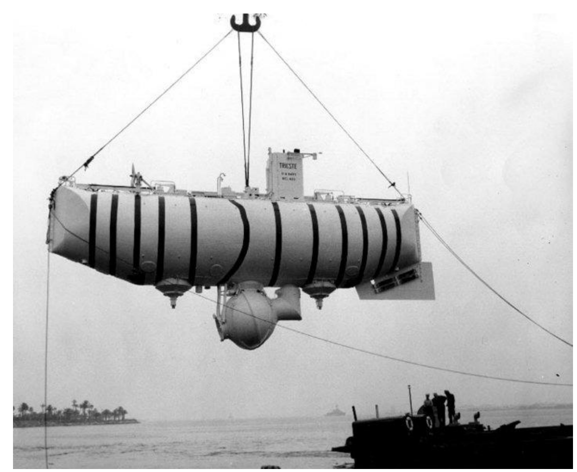
Kommunizierende Röhren: Der Bodendruck und damit die Steighöhe ist unabhängig von der Gestalt des Gefäßes (hydrostatisches Paradoxon).

Hydraulik: Kraftübertragung mit Flüssigkeiten. Kleine Kraft auf einen Stempel mit kleiner Fläche erzeugt große Kraft an einem Stempel mit großer Fläche – allerdings mit kleinem Weg (Arbeit = Kraft · Weg ist konstant).

Druck über und unter Wasser

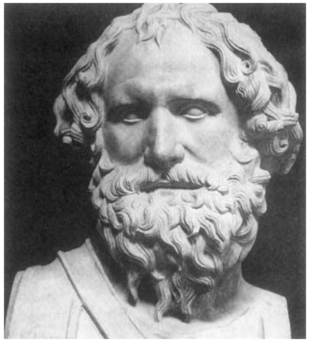
Der Schwerdruck (oder hydrostatische Druck) gilt auch für das Fluid "Luft", auch wenn aufgrund der hohen Kompressibilität von Gasen die Dichte nicht konstant ist. Integriert vom Erdboden bis in beliebige Höhe lastet auf jedem cm^3 eine Luftsäule mit einer Masse von ca. 1 kg. Der Druck ist damit ca. 10^5 Pa = 1 bar (mehr zu Druckeinheiten weiter unten).

Unter Wasser erhöht sich der Druck pro 10 m um etwa 1 bar, weil pro cm^3 ca. 1 kg Wasser hinzukommt. Ein Taucher in einer typischen Wassertiefe von 20 m befindet sich also bei 3fachem Atmosphärendruck, was zunächst nicht schädlich ist, da das Wasser in den Köperzellen denselben Druck aufweist und sein Volumen praktisch nicht ändert. Der Druck muss sich aber auch in luftgefüllten Hohlräumen angleichen, insbesondere im Mittelohr, das über die sog. Eustachi-Röhre mit dem Rachenraum verbunden ist.



Die tiefste Meeresstelle liegt fast 11.000 m unter der Oberfläche (Marianengraben im Pazifik). Der Druck beträgt hier über 10^8 Pa oder 1000 bar. Diese Tiefe wurde 1960 mit dem sog. Bathyscaph *Trieste* erreicht (J. Piccard und D. Walsh). Dieses Tauchboot bestand aus einem Auftriebskörper, der mit Benzin gefüllt war (leichter als Wasser, aber geringe Kompressibilität, d.h. es wird kein Druckkörper benötigt) und einer kugelförmigen Druckkabine für die Besatzung. Zum Abtauchen wurden luftgefüllte Kammern geflutet, zum Auftauchen wurde Ballast (Eisenkugeln) abgeworfen.
Der Vorteil gegenüber normalen U-Booten mit luftgefüllten Druckkörpern liegt in der großen erreichbaren Tiefe.

Auftriebskraft



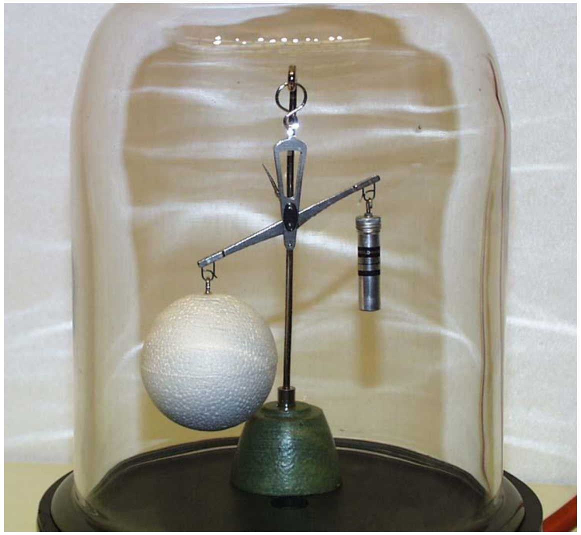
Archimedes 287-212 v. Chr.

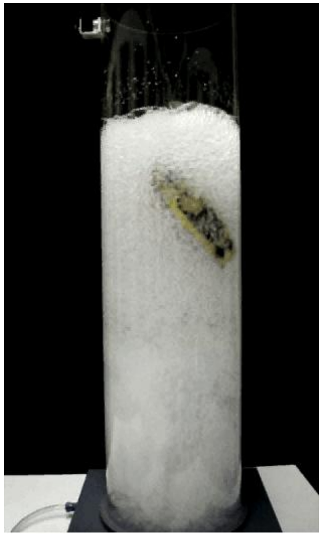
Differenz zwischen Unter- und Oberseite eines Körpers z.B. eines Quaders

$$F_A = \Delta p \cdot A = \rho_W \cdot g \cdot \Delta h \cdot A = \rho_W \cdot g \cdot V = m_W \cdot g$$

Archimedisches Prinzip:
Auftriebskraft = Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge

Wenn der Auftrieb gleich dem Gewicht des Körpers ist, schwebt er.
Das Prinzip ist auch auf Gase anwendbar (z.B. Ballon, Zeppelin etc.).





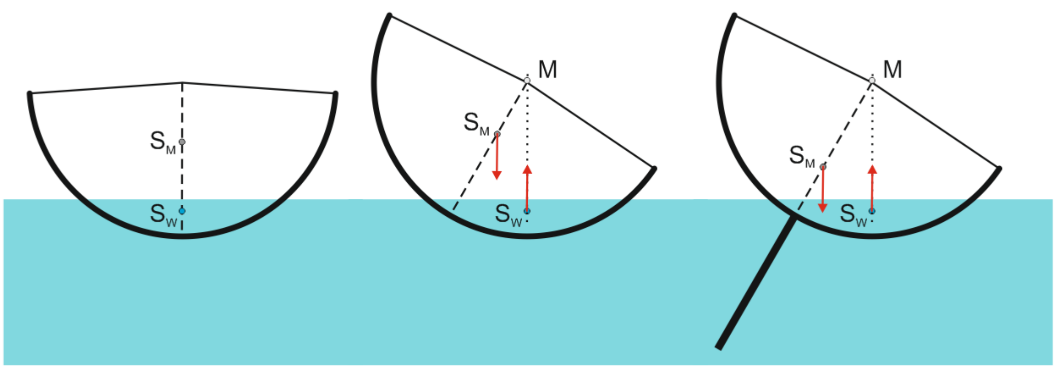
Versuche zum Archimedischen Prinzip. Links wird ein Körper vollständig eingetaucht und das überlaufende Wasser gesammelt. Das um den Auftrieb reduzierte Gewicht des Körpers plus das Gewicht des gesammelten Wassers ist gleich dem Gewicht des Körpers (Federkraftmesser). Mitte: In Luft erscheinen die gezeigten Objekte gleich schwer. Die Styroporkugel ist etwas schwerer, aber ihr Auftrieb in Luft ist größer. Rechts: Warum im Bermuda-Dreieck Schiffe verschwinden (Methanblasen reduzieren die Dicht des Wassers und damit den Auftrieb).

Form- und Gewichtsstabilität

Räumliche Verteilung des Auftriebs

Die Gewichtskraft eines Schiffs greift an seinem Massenschwerpunkt S_M an.
Die Auftriebskraft eines Schiffs greift am S_W der verdrängten Wassermenge, dem sog. Formschwerpunkt an.

Angenommen, der Massenschwerpunkt liegt auf der Mittellinie des Schiffs. Der Schnittpunkt zwischen einer Linie vom Formschwerpunkt vertikal nach oben und der Mittellinie ist das Metazentrum M.
Stabilität: M höher als S_W, Drehmoment entgegen der Krängung.
Instabilität: M tiefer als S_W, Drehmoment unterstützt die Krängung.
Die Stabilität muss so hoch sein, dass sie auch auch Effekte wie Wind, Wellen, verrutschende Ladung etc. nicht gefährdet wird.
Jollen, deren Stabilität hauptsächlich auf der Verlagerung des Formschwerpunkts basiert, sind "formstabil" und kentern bei einer Krängung von 90 – 100°.
Kielboote haben eine schweren Kiel, der den Massenschwerpunkt nach unten verlagert, sie sind "gewichtsstabil" und kentern bei einem höheren Krängungswinkel oder überhaupt nicht.



Druck p = Kraft / Fläche $[p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ (Pascal) $= 10^{-2}$ hPa

Evangelista Torricelli
(1608 – 1647)

Historische (nicht-SI) Druckeinheiten:

$\text{Bar}: \ 1 \ \text{bar} = 10^5 \ \text{Pa} \qquad (1 \ \text{mbar} = 1 \ \text{hPa})$

$\text{Torr}: \ 1 \ \text{Torr} = 1 \ \text{mmHg} = 133{,}3 \ \text{Pa} = 1{,}333 \ \text{hPa}$

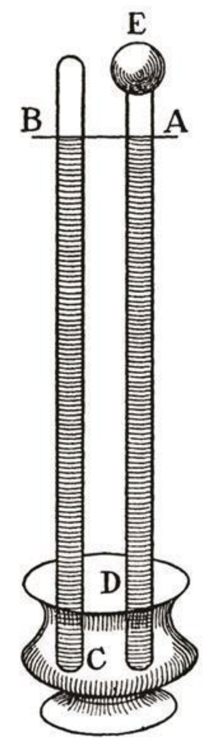
$\text{physikalische Atmosphäre}: 1 \ \text{atm} = 760 \ \text{Torr} = 1{,}013 \cdot 10^5 \ \text{Pa} = 1013 \ \text{hPa}$

$\text{technische Atmosphäre}: 1 \ \text{at} = 1 \ \text{kp/cm}^2 = 0{,}981 \cdot 10^5 \ \text{Pa} = 981 \ \text{hPa}$

$\text{Pfund/Quadratzoll (GB, USA)}: 1 \ \text{psi} = 1 \ \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 6895 \ \text{Pa} = 68{,}95 \ \text{hPa}$

$\text{Zoll Quecksilber (USA)}: 1 \ \text{inHg} = 3386 \ \text{Pa} = 33{,}86 \ \text{hPa}$

Beispiel PKW: Reifendruck 2,5 bar = 2500 hPa entspricht ca. 36,26 psi
Beispiel Flugzeug: Höhenmessereinstellung 1010 hPa entspricht 29,83 inHg



5.4 Gase, makroskopisch: der Luftdruck

Im Gegensatz zu Flüssigkeiten besitzen Gase eine hohe Kompressibilität

$$\kappa = -\frac{\Delta V / V}{\Delta p} \quad \rightarrow \quad \kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} \qquad [\kappa] = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$$

Für konstante Temperatur findet man experimentell $p \cdot V = \text{const}$

$$V = \frac{\text{const}}{p} \qquad \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{\text{const}}{p^2} = -\frac{V}{p} \qquad \boxed{\kappa = \frac{1}{p}} \qquad \text{(Boyle-Mariottesches Gesetz)}$$

Hier ist κ keine Materialkonstante, sondern beschreibt das Verhalten jedes "idealen" Gases.

Schweredruck = Gewicht der Luftsäule (Höhe *h*) über einer Einheitsfläche

Anstieg von Höhe *h* auf *h*+*dh*: Druckabnahme *dp*

$$dp = -\frac{\text{Gewicht}}{\text{Fläche}} = -\frac{\rho \cdot g \cdot A \cdot dh}{A} = -\rho \cdot g \cdot dh$$

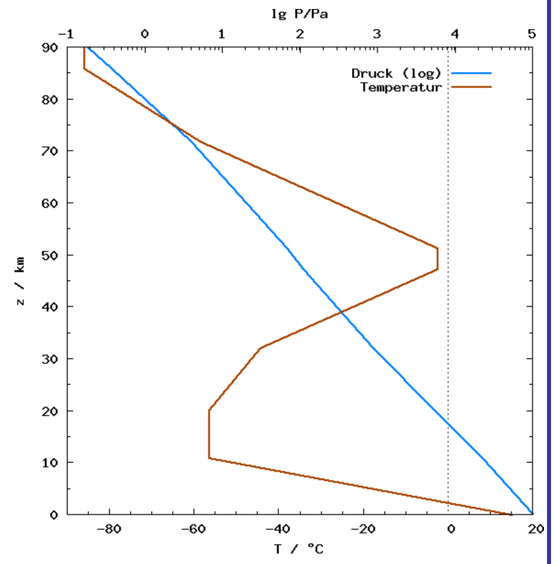
$$p \cdot V = p \cdot \frac{M}{\rho} = \text{const} \quad \rightarrow \quad \rho = p\frac{\rho_0}{p_0}$$

$$dp = -p\frac{\rho_0}{p_0} g \cdot dh \qquad \frac{1}{p} dp = \frac{\rho_0}{p_0} g \cdot dh \qquad \int \frac{1}{p} dp = \frac{\rho_0}{p_0} g \cdot \int dh$$

$$\ln p = \frac{\rho_0}{p_0} g \cdot h + C \xrightarrow{p(h=0)=p_0} \frac{\rho_0}{p_0} g \cdot h + \ln p_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} p &= p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} h\right) = p_0 \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right) \\ \rho &= \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} h\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right) \end{aligned}}$$

$$p = p_0 / 2 \text{ in } h_0 \cdot \ln 2 = 5{,}77 \text{ km Höhe}, \quad p = p_0 / e \text{ in } h_0 = 8{,}33 \text{ km Höhe}$$



Die Erdatmosphäre ist keineswegs isotherm (rote Kurve), doch folgt der Druck noch weitgehend dem exponentiellen Gesetz (blaue Kurve, die in der logarithmischen Darstellung idealerweise eine Gerade ist).

Barometrische Höhenformel (isotherme Atmosphäre)

Zum Vergleich:
Kilimanjaro 5895 m,
Mount Everest 8848 m