5.2 Elastische Deformationen

Elastisch: Deformation verschwindet bei Entfernen der Kraft (sonst: plastisch)

Dehnung in Längsrichtung

Experimenteller Befund für kleine Dehnung: Es gilt das Hookesche Gesetz, außerdem ist die Zugkraft proportional zur Querschnittsfläche A und zur relativen Längenänderung

$$F \sim A \qquad F \sim \Delta L / L$$

E : **Elastizitätsmodul**
σ: Zugspannung
ε: relative Dehnung

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L} \qquad [E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa} = 10^{-9}\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2} = 10^{-9}\ \mathrm{GPa}$$

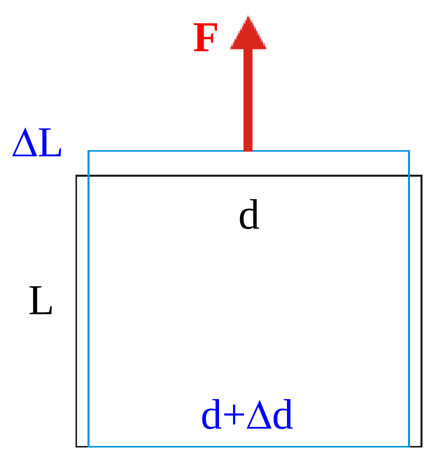
$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \qquad [\sigma] = \mathrm{Pa}$$

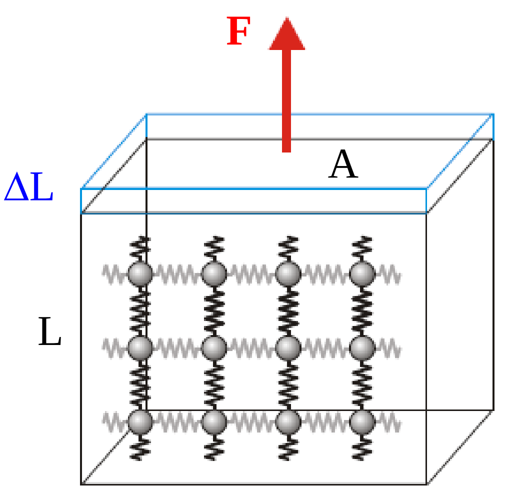
Es ist hier nicht üblich, das entgegengesetzte Vorzeichen von F und ΔL auszudrücken.

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$$

Beispiele für E

Wolfram	407 GPa
Stahl	100-200 GPa
Quarzglas	75 GPa
Blei	19 GPa
Eis	10 GPa





Die Dehnung ist mit einer **Querkontraktion** verknüpft, wobei allerdings das Volumen nicht konstant bleibt, z.B. Stab der Länge L mit quadratischem Querschnitt $A = d^2$

$$\Delta V = (d+\Delta d)^2 \cdot (L+\Delta L) - d^2 L = \left(d^2 + 2d\cdot\Delta d + \Delta d^2\right)\cdot(L+\Delta L) - d^2 L$$
$$= d^2 L + 2d\cdot\Delta d\cdot L + \Delta d^2 L + d^2\Delta L + 2d\cdot\Delta d\cdot\Delta L + \Delta d^2\Delta L - d^2 L \approx 2d\cdot\Delta d\cdot L + d^2\Delta L$$

Terme mit Produkten kleiner Faktoren vernachlässigt. Damit:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta L}{L}\left(1 + 2\frac{\Delta d/d}{\Delta L/L}\right) \qquad \boxed{\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1-2\mu) \qquad \mu \equiv -\frac{\Delta d/d}{\Delta L/L}} \quad \text{(positive Zahl)}$$

Wenn die sog. **Querkontrationszahl (Poisson-Zahl)** $\mu = 0{,}5$ ist, bleibt das Volumen konstant.
Typisch ist aber $\mu \approx 0{,}2$ (Hartgummi), $\mu \approx 0{,}3$ (Stahl), $\mu \approx 0{,}45$ (Blei), d.h. das Volumen nimmt zu.

Stauchung in Längsrichtung

Volumen wird kleiner, Querschnitt nimmt zu, solange $\mu < 0{,}5$ ist

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \varepsilon(1-2\mu) \qquad \mu > 0 \qquad \varepsilon < 0$$

Druck auf alle Flächen $\Delta p = -\sigma$

Länge und Dicke werden verkürzt, aber durch die Verkürzung in den jeweils beiden anderen Richtungen wird die Länge bzw. die Dicke wieder etwas vergrößert (wenn $\mu < 0{,}5$ ist) wie bei der 1-dimensionalen Stauchung. Insgesamt (1. Term in der Klammer = Verkürzung, 2. Term = Verlängerung):

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E}(1-2\mu) \quad \text{und} \quad \frac{\Delta d}{d} = \frac{\sigma}{E}(1-2\mu) \quad \text{mit} \quad \sigma < 0$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta d}{d} = 3\frac{\sigma}{E}(1-2\mu) \qquad \sigma < 0$$

Kompressionsmodul K $\quad \boxed{K \equiv \frac{1}{\kappa} \equiv -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}}$ $\quad$ mit $\sigma = -\Delta p$

Kompressibilität κ $\quad \boxed{\kappa = \frac{3}{E}(1-2\mu)}$ $\quad$ Beziehung zwischen Kompressibilität, Elastizitätsmodul und Poissonzahl

Deformationsarbeit (elastisch)

$$W = \int_0^L F \cdot dL = \int_0^\varepsilon \sigma \cdot A \cdot L \cdot d\hat{\varepsilon} = V \int_0^\varepsilon \sigma \cdot d\hat{\varepsilon}$$

Hookesches Gesetz

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \quad W = E \cdot V \int_0^\varepsilon \hat{\varepsilon} \cdot d\hat{\varepsilon} \qquad \boxed{W = \frac{1}{2} E \cdot V \cdot \varepsilon^2}$$

vgl. früher mit Federkonstante k $\quad W = \frac{1}{2} k \cdot x^2$

Scherung

$$\tau = \frac{F}{A} \qquad \frac{\Delta x}{L} = \tan\alpha \approx \alpha$$

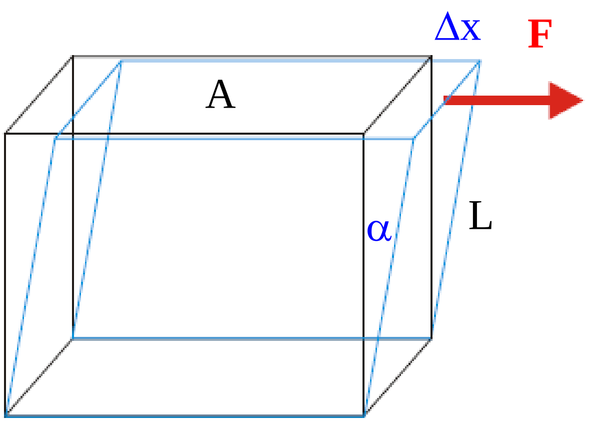
τ: Schubspannung, Kraft pro Flächeneinheit tangential zur Fläche

$$\boxed{\tau = G \cdot \alpha}$$

G: **Schubmodul** (auch: Schermodul, Torsionsmodul)

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}}$$

Dieser Zusammenhang zwischen Schubmodul, Elastizitätsmodul und Poissonzahl wird in einführenden Lehrbüchern selten hergeleitet und gilt auch nur in isotropen Materialien (**siehe Nachtrag auf der letzten Seite**).



Torsion

$$\tau = \frac{dF}{2\pi \cdot r \cdot dr} = G \cdot \alpha = G \cdot \frac{r\varphi}{L}$$

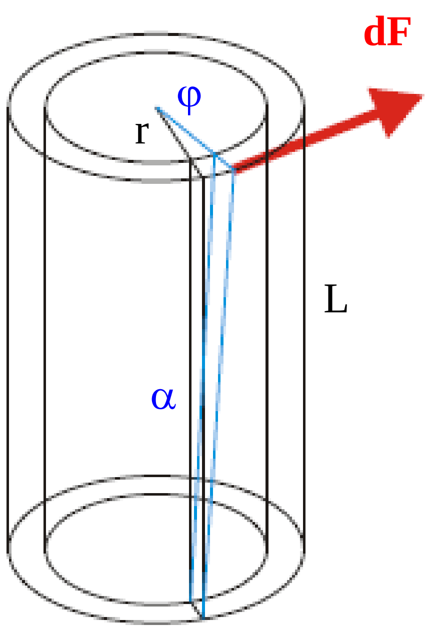
Kraft pro Ringfläche

Aus der Scherung resultiert ein Drehmoment. Integriert:

$$D = r \cdot F = \int_0^R r \cdot G \cdot \frac{r\varphi}{L} \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = G\frac{\pi R^4}{2L} \cdot \varphi$$

$$\boxed{D = D_R \cdot \varphi}$$

Drehmoment = Richtmoment · Winkel

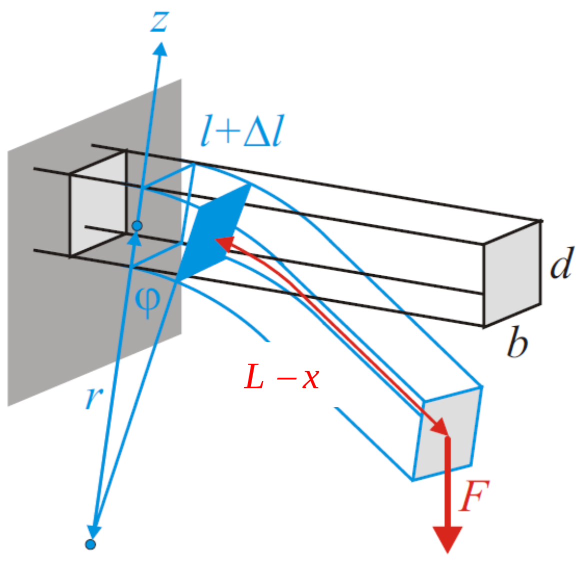


Zusammenfassung

ein <u>isotroper</u> Festkörper wird durch folgende elastische Konstanten beschrieben. Sind zwei davon bekannt, lassen sich die anderen berechnen:

- Kompressionsmodul K (oder Kompressibilität κ)
- Schermodul G (oder Richtmoment D_R)
- Elastizitätsmodul E
- Poissonzahl μ

Wie biegt sich ein Balken?



Betrachte Länge $l+\Delta L$ eines Bogens mit Radius r + z, wobei $z = 0$ die Mitte des Balkens (sog. "neutrale Faser") ist:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \frac{z}{r} \qquad \leftarrow \qquad \frac{l+\Delta l}{l} = \frac{r+\Delta r}{r}$$

$$dF = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot b \cdot dz = E\frac{z}{r} \cdot b \cdot dz$$

$$dD = dF \cdot z = E\frac{z^2}{r} \cdot b \cdot dz$$

$$D = \frac{E \cdot b}{r} \int_{-d/2}^{d/2} z^2 dz = \frac{E \cdot b}{r} \cdot \frac{z^3}{3}\bigg|_{-d/2}^{d/2} = \frac{E \cdot b \cdot d^3}{12r}$$

$$D = F \cdot (L-x) \qquad \rightarrow \qquad \boxed{r = \frac{E \cdot b \cdot d^3}{12F \cdot (L-x)}}$$

Drehmoment und lokaler Biegeradius bei $L-x$ (Abstand zum Punkt, an dem die Kraft F angreift). Für kleine Biegewinkel φ, gilt $D \approx F \cdot (L-x)$

Um welchen Wert $z(L)$ biegt sich das Balkenende nach unten? Für kleine Biegewinkel ist $z'' \approx 1/r$

$$z''(x) = \frac{dz'(x)}{dx} \approx -\frac{\varphi}{\Delta x} \approx -\frac{1}{r} = -\frac{12F}{E \cdot b \cdot d^3}(L-x)$$

Zweimal integriert mit $z'(0) = z(0) = 0$

$$z(x) = -\frac{12F}{E \cdot b \cdot d^3}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \quad \xrightarrow{x=L} \quad \boxed{z(L) = -4\frac{L^3}{E \cdot b \cdot d^3}F}$$

Die Deformation der Erde

Zentrifugalkraft aufgrund der Eigenrotation: Erde als Rotationsellipsoid
- Radius in Richtung der Rotationsachse 6357 km
- Radius in der Äquatorebene 6378 km

Zentrifugalkraft aufgrund des Mondumlaufs, Gravitation des Mondes (+ Einfluss der Sonne): Gezeiten
- periodische Verformung der Erdkruste ca. 0,5 m
- periodische Verformung der Meeresoberflächen typisch 1 m, regional bis zu 20 m
- Abbremsung der Erdrotation, Abnahme der Periode um 16 μs / Jahr

---

Nachtrag: Ableitung der Beziehung $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ mit einem Würfel der Kantenlänge L. Zerlegung der tangential angreifenden Kraft (und Gegenkraft) in eine Zugkraft F_1 entlang der Hauptdiagonale d_1 und eine stauchende Kraft F_2 entlang der Nebendiagonale d_2. Die resultierende Spannung ist

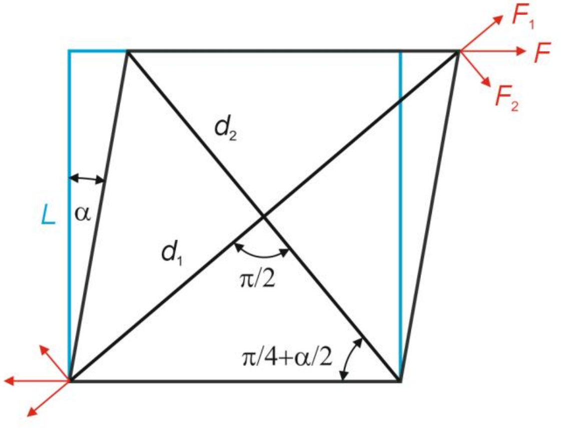
$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2\frac{F/\sqrt{2}}{L^2\sqrt{2}} = \tau \qquad \Delta d_{1,2} = \pm\frac{\tau}{E}(1+\mu)$$

Die Dehnung von d_1 bzw. Stauchung von d_2 bewirkt eine zusätzliche Verkürzung von d_2 bzw. Dehnung von d_1 (abhängig von der Poissonzahl)

Der Tangens ist das Verhältnis der verlängerten zur verkürzten Diagonale (beide Näherungen durch Taylor-Entwicklung für kleinen Winkel α)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d_1}{d_2}\cdot\frac{1+\frac{\tau}{E}(1+\mu)}{1-\frac{\tau}{E}(1+\mu)} \approx 1+2\frac{\tau}{E}(1+\mu)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) \approx 1+\alpha = 1+\frac{\tau}{G}$$



Gleichsetzen des jeweils 2. Terms ergibt die Beziehung.