

4.2 Wellen

Wellengleichung (s. letzte Vorlesung)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad v^2 = T \frac{\Delta L}{m} = T \frac{L}{M} = \frac{T}{\rho}$$

Die homogene, partielle DGL 2. Ordnung beschreibt die Auslenkung in y -Richtung für Oszillatoren mit Masse m und Abstand ΔL bei Position x zur Zeit t . Die Gesamtmasse ist M , die Gesamtlänge ist L , die sog. Massenbelegung ist damit $\rho = M/L$. Die Seilspannung T hat die Einheit 1 N. Der Parameter v kann als Ausbreitungsgeschwindigkeit interpretiert werden (s. weiter unten).

Eingespante Saite $y(0, t) = y(L, t) = 0$

Anfangsbedingung $y(x, 0) = y_0(x)$

$$\dot{y}(x, 0) = \dot{y}_0(x)$$

Lösung mit Produktansatz $y(x, t) = A(x) \cdot B(t)$

Produktansatz eingesetzt:

$$\dot{y} = A \cdot \dot{B} \quad \ddot{y} = A \cdot \ddot{B}$$

$$y' = B \cdot A' \quad y'' = B \cdot A'' \quad \rightarrow \quad A \cdot \ddot{B} - v^2 \cdot B \cdot A'' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\ddot{B}}{B} - v^2 \frac{A''}{A} = 0$$

Für alle x und t gilt $f(t) - g(x) = 0 \quad \rightarrow \quad f(t) = g(x) = \text{const.} = -\omega^2$

$$\frac{\ddot{B}}{B} = -\omega^2 \quad \ddot{B} + \omega^2 B = 0 \quad \rightarrow \quad B(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

$$v^2 \frac{A''}{A} = -\omega^2 \quad A'' + \underbrace{\frac{\omega^2}{v^2}}_{\equiv k^2} A = 0 \quad \rightarrow \quad A(x) = d_1 e^{ikx} + d_2 e^{-ikx}$$

Mit den Randbedingungen ist

$$A(x) = \sin(k \cdot x) \quad A(0) = 0 \quad A(L) = \sin(k \cdot L) = 0 \quad \text{d.h.} \quad k = \frac{\pi}{L} n \quad n \in \mathbb{N}$$

Zur Zeit $t = 0$ sei die Saite in der Ruhelage, d.h. $y_0(x) = 0$

$$y(x,t) = \sin(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \{ \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) - \cos(\omega \cdot t + k \cdot x) \}$$

Dies ist eine sog. stehende Welle, die als Überlagerung zweier laufender Wellen in entgegengesetzter Richtungen interpretiert werden kann. Laufende Wellen in positiver x -Richtung werden allgemein

$$y(x,t) \propto \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \quad \text{oder} \quad y(x,t) \propto e^{i(\omega t - k \cdot x)}$$

beschrieben, d.h. für einen festen Zeitpunkt t ergibt sich eine periodische Funktion des Orts und an einem bestimmten Ort x wird eine harmonische Schwingung beobachtet.

Mit der Definition (s.o.) $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad \omega = v \cdot k$

Frequenz der Schwingung $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} v \cdot k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\pi \cdot n}{L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot n$

Höhere Saitenspannung und/oder kürzerer Saite \rightarrow höherer Ton.

$n = 1$ Grundfrequenz

$n > 1$ Obertöne

Wellenlänge (Länge entlang x für eine Sinusschwingung) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{v}{f}$

Die Größe k wird als Wellenzahl bezeichnet $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Beispiele für Wellen

- Longitudinale oder transversale Auslenkung von Oszillatoren (gekoppelte Pendel, Atome, Saiten, Flächen ...)
- Auslenkung von Grenzflächen z.B. Oberfläche von Wasser, seismische Wellen
- Schallwellen (longitudinale Dichte- und Druckschwankungen in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern)
- Plasmawellen (Dichteunterschiede von Elektronen und Ionen)
- Signale auf Drähten
- Elektromagnetische Wellen: Radiowellen, Infrarot, sichtb. Licht, Ultraviolett, Röntgen-, Gammastrahlung
- Wahrscheinlichkeitswellen für Teilchen (s. Quantenmechanik)

Transversale Wellen sind linear oder zirkular "polarisiert" (die Schwingung hat eine Richtung)

Grundgrößen

Frequenz f und Kreisfrequenz ω

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Wellenlänge λ und Wellenzahl k

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Phasengeschwindigkeit v und Gruppengeschwindigkeit v_G

$$v = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k} \quad v_G = \frac{d\omega}{dk}$$

Im Allgemeinen müssen diese Geschwindigkeiten nicht konstant sein, sondern können von der Wellenlänge abhängen (**Dispersion** z.B. von Licht in Glas, Meereswellen, ...).

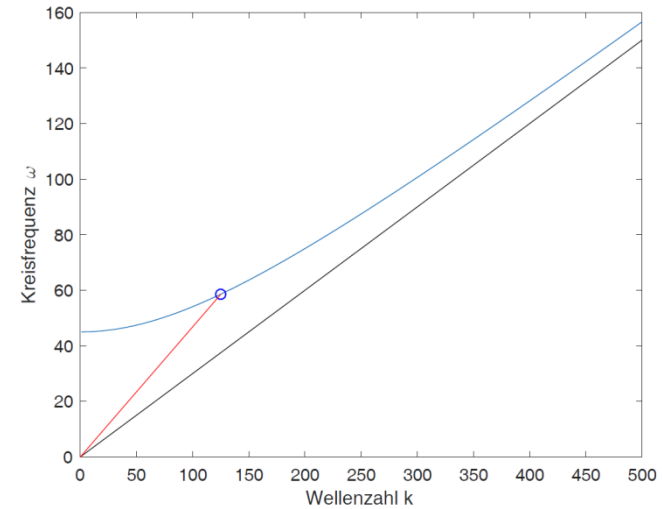
Die Beziehung zwischen ω und k wird Dispersionsrelation genannt. Wenn sie nicht linear ist (keine Ursprungsgerade), muss man unterscheiden:

- Phasengeschwindigkeit: Geschwindigkeit eines Merkmals der Oszillation z.B. eines Wellenbergs.
- Gruppengeschwindigkeit: Geschwindigkeit eines Merkmals der Einhüllenden, z.B. des Maximums eines "Wellenpakets" (z.B. das Muster einer Schwebung oder eine pulsförmige Welle).

Beispiel:

Welle ohne Dispersion (schwarz), z.B. Licht im Vakuum

Welle mit Dispersion (blau), z.B. Radiowelle in einem Rohr (Wellenleiter). Die Phasengeschwindigkeit (Steigung der roten Ursprungsgeraden) kann größer sein als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c , transportiert aber keine Information, während die Gruppengeschwindigkeit (Steigung der Tangente) kleiner als c ist.

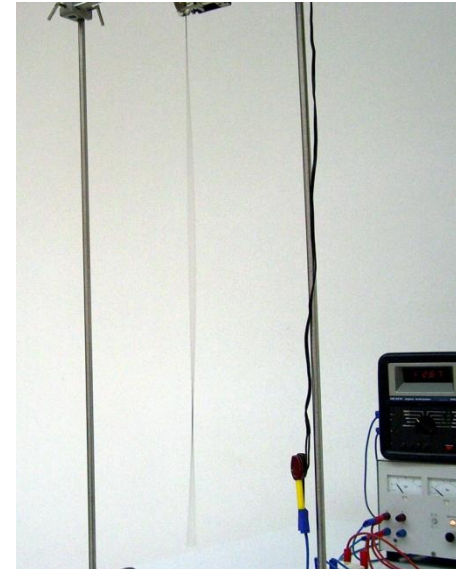
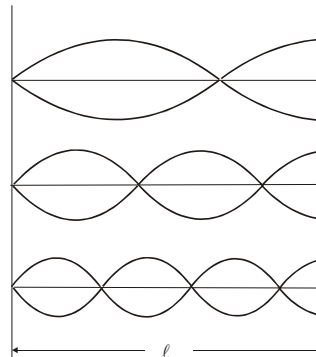


Weitere Details siehe Physik II und III.

Experimente:

Transversale Wellen mit einer Spiralfeder:
Schwingungsknoten am feste Ende
Schwingungsbauch am losen Ende

Stehende Wellen auf einseitig eingespanntem Stab:
Im Schattenwurf erkennt man die
Schwingungsbäuche und -knoten.



5 "Reale" Körper

Bisherige Modelle: Massenpunkt und starrer Körper. Jetzt sollen Deformationen betrachtet werden. Hierbei spielt zum ersten Mal auch die atomare Struktur der Körper eine Rolle, weil es nicht mehr egal ist, aus welchem Werkstoff ein Körper gefertigt ist. Natürlich wird auch hier idealisiert, aber die Modellvorstellung kommt nun realen Körpern näher als zuvor.

5.1 Exkurs: Aufbau der Materie (Kurzfassung)

Materie ist fest, flüssig oder gasförmig (sog. Aggregatzustände).

Fest: hohe Dichte, Atome/Moleküle eng benachbart und haben feste Plätze (Fernordnung), feste Form.

Flüssig: hohe Dichte, Atome/Moleküle eng benachbart, können sich aber gegeneinander bewegen (Nahordnung), keine feste, sondern "fließende" Form.

Gas: niedrige Dichte, völlig freie Atome/Moleküle, füllt jeden angebotenen Raum.

Die Übergänge hängen z.B. von Temperatur und Druck ab, siehe Wärmelehre (später in diesem Semester).

Zunächst: Festkörper

Manche Festkörper bilden Kristalle (z.B. Kochsalz, Zucker, ...), was eine atomare Struktur nahelegt, die sich periodisch wiederholt. Es gibt also eine Fernordnung (feste Beziehung zwischen weit entfernten Atomen).

Fast alle festen Stoffe sind *kristallin* oder *polykristallin*, bestehen also aus einer Vielzahl winziger Kristalle.

Manche Festkörper *amorph*, d.h. es gibt keine Fernordnung, aber eine Nahordnung, ähnlich einer sehr zähen Flüssigkeit, z.B. Gläser (dass Kirchenfenster über Jahrhunderte fließen, scheint aber eine Legende zu sein).

Kunststoffe sind oft *hochpolymer*, d.h. sie bestehen aus langen Molekülen, die mehr oder weniger miteinander vernetzt sind.

Die Struktur auf atomarer Ebene bestimmt sehr stark die Deformationseigenschaften und Festigkeit von Festkörpern, z.B. ist reines Eisen eher weich, Eisen mit eingelagerten Kohlenstoffatomen (Stahl) kann hart, aber spröde (bruchanfällig) sein oder nach entsprechender thermischer Behandlung sowohl große Härte als auch Bruchfestigkeit aufweisen.

Kristallgitter

Kleinste Einheit: "primitive" Gitterzelle mit Gittervektoren. Ausgehend von einer Ecke der Gitterzelle erreicht man die nächste gleichartige Ecke mit

$$\vec{R} = n_1 \cdot \vec{a} + n_2 \cdot \vec{b} + n_3 \cdot \vec{c} \quad (n_i \text{ ganzzahlig}).$$

Die Translationsvektoren R definieren Gitterpunkte, die Beträge a , b , c der Gittervektoren heißen Gitterkonstanten und ihre Winkel zueinander (α zwischen b und c , usw.) sind die Gitterwinkel.

Mit Symmetrioperationen (Spiegelung am Ursprung und an den Ebenen, Drehung um Symmetrieachsen) werden 7 Kristallsysteme definiert, je nach Gitterwinkel und Gleichheit der Gitterkonstanten.

Das Gitter mit der höchsten Symmetrie heißt "kubisch"

$$a = b = c \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

Den Gitterpunkten wird eine Atomstruktur zugeordnet, d.h. entweder ein einziges Atom oder mehrere. Kubische Gitter können "flächenzentriert" (zusätzliche Atome in der Mitte der Flächen der Gitterzellen) oder "raumzentriert" (zusätzliche Atome in der Mitte der Zelle) sein.

Mit diesen zusätzlichen Eigenschaften ergeben sich 14 sog. Bravais-Gitter (Auguste Bravais 1811-1863).

Der **Typ der Bindung** zwischen den Atomen beeinflusst die Festigkeit. In der Reihenfolge abnehmender Stärke:

- Kovalente Bindung (Elektronenhüllen überlappen sich)
- Ionenbindung (Austausch eines Elektrons und Anziehung)
- Metallische Bindung (frei bewegliche Elektronen zwischen den Ionen)
- Van-der-Waals-Bindung ("influenzierte" elektrische Dipole)

