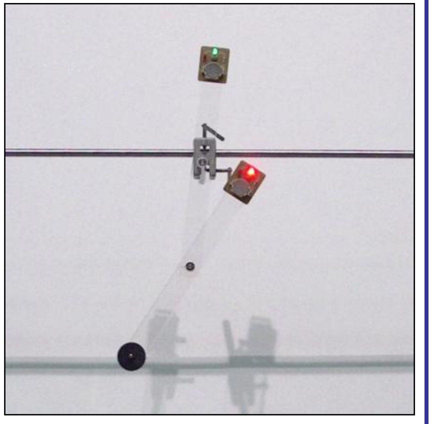
Instabiles Doppelpendel



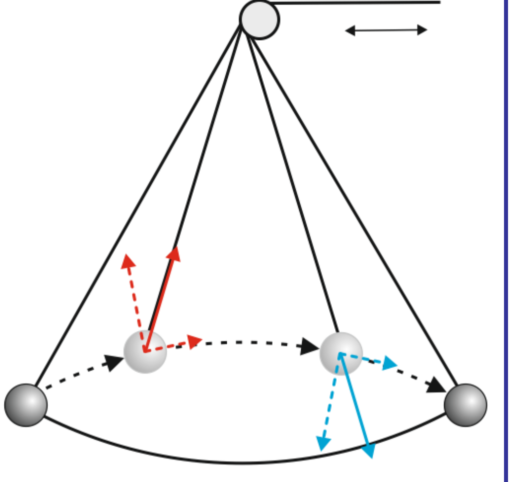
Das Doppelpendel besteht aus zwei miteinander gekoppelten Rotoren, wobei die Achse des einen Rotors am Ende des anderen befestigt ist. Je nach Anfangsbedingungen zeigt das Doppelpendel stabile Moden oder chaotisches Verhalten.

Parametrisches Pendel

Wird die Länge eines Fadenpendels periodisch variiert, ändert sich ständig seine Schwingungsfrequenz. Bewegungsgleichung:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2(t) \cdot y(t) = 0 \qquad \omega^2(t) = \frac{g}{L + \Delta L \cos(\Omega \cdot t + \varphi)} \approx \frac{g}{L}\left(1 - \frac{\Delta L}{L}\cos(\Omega \cdot t + \varphi)\right)$$

(Mathieusche Differenzialgleichung)



Stabilität oder Instabilität (anwachsende Amplitude) hängt von der Wahl der Parameter ΔL, Ω und φ ab. Wenn z.B. die Pendellänge mit der Frequenz $\Omega = 2\omega$ variiert, sodass das Pendel im Nulldurchgang verkürzt ist, nimmt die Amplitude zu. Die allgemeine Behandlung der Gleichung erfolgt mit numerischen Methoden, aber die Zunahme der Schwingungsenergie wird auch durch die Betrachtung der Kräfte plausibel.
Wenn das Pendel verkürzt wird (rot), wird am Pendel Arbeit gegen die Schwerkraft und die Zentrifugalkraft geleistet. Wird das Pendel verlängert, leisten die Schwerkraft und die Zentrifugalkraft Arbeit am Pendel. In beiden Fällen gibt es eine Kraftkomponente in Richtung der Bewegung, die den Pendelkörper beschleunigt.
Verwandte Beispiele:
- Körperbewegung auf einer Schaukel oder Schiffschaukel (Schwung durch Verlagerung des Schwerpunkts).
- Pendelndes Weihrauchfass *Botafumeiro* in der Kathedrale von Santiago de Compostela. Acht Mönche ziehen beim Nulldurchgang des Pendels am Seil, um es in Schwung zu versetzen.

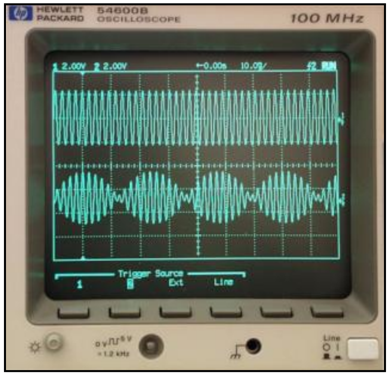
Exkurs: Der Oszillograf

Viele Schwingungen aus verschiedenen Bereichen der Physik liegen direkt als elektrische Signale vor (z.B. eine Wechselspannung), andere (z.B. räumliche Positionen, Töne, etc.) werden i.d.R. in elektrische Signale umgewandelt und können direkt mit einem Oszillografen als Funktion der Zeit betrachtet werden.
Der Oszillograf ist das Standardinstrument in einem physikalischen Labor.

Zwei Bauweisen: traditionell (Elektronenröhre) oder modern (digitalisierte Signale werden auf einem Computer-Bildschirm etwa so dargestellt, wie sie auf dem Schirm einer Elektronenröhre erscheinen würden). In jedem Fall typischerweise 2-dimensionale Darstellung mit 10 Kästchen in jeder Richtung.
Abszisse: Zeit (Angabe des Zeitintervalls pro Kästchen, z.B. 5 μs/div)
Ordinate: elektrische Spannung (Angabe des Intervalls pro Kästchen, z.B. 10 mV/div)
In beide Richtungen kann man den Messbereich ändern und das Bild verschieben.

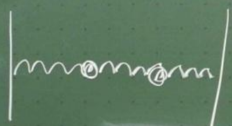
Funktionsweise (traditionell): Ein Elektronenstrahl erzeugt auf einen Bildschirm einen Leuchtpunkt.
Der Strahl wird durch das elektrische Feld von Ablenkplatten, an denen eine Spannung anliegt, abgelenkt.
Vertikale Ablenkung proportional zur Höhe des Signals.
Horizontale Ablenkung durch Sägezahnspannung (langsam von links nach rechts, schnell zurück).

Wichtig ist auch die Funktion des **Triggers**, der den Beginn der Strahlbewegung von links nach rechts auslöst, z.B. dann, wenn das Signal eine bestimmte Höhe (Trigger-Schwelle) erreicht hat. Dadurch wird ein periodisches Signal immer wieder auf derselben Kurve dargestellt und nicht zeitlich versetzt (sonst würde z.B. ein sinusförmiges Signal nur als breites Band auf dem Schirm erscheinen).



$N \to \infty$ gekoppelter Oszillatoren:

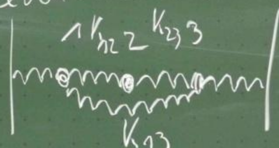
Wellen: speziell stehende Wellen einer schwingenden Saite; Einführung in die Harmonielehre



$N = 2$

Federkonstanten

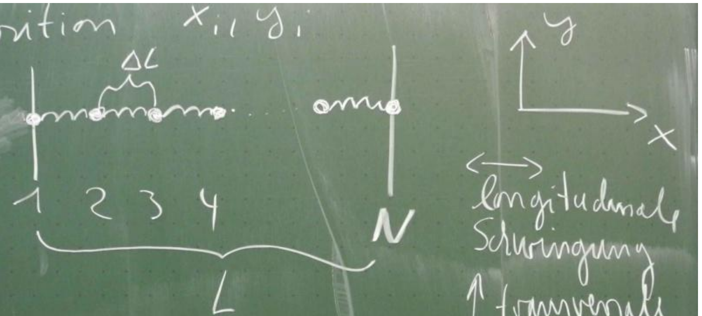
$N \geq 2 \quad M_{ij} = \frac{k_{ij}}{m_i}$



etc

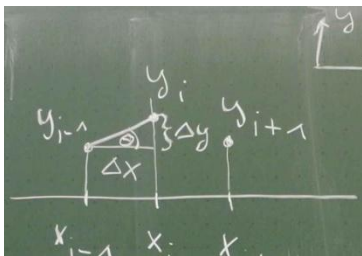
heute: N Massenpunkte, gekoppelt, identische Massen m an der

Position x_i, y_i



Ruhelage: $y_i = 0 \quad x_i - x_{i-1} = \Delta L$

Die "Saite" sei gespannt mit von außen aufgebrachter Kraft T; T heißt Saitenspannung $[T] = N$. Die Rückstellkraft auf MP pro Auslenkung sei konstant, d.h. "Hookesches Gesetz" gilt



$$F_{Rück} = -T\sin\Theta \approx -T\tan\Theta$$

$$\Theta \ll 1 \Big| = -T\frac{\Delta y}{\Delta x} = -T\frac{\Delta y}{\Delta L}$$

$\sin\Theta = \Theta + \mathcal{O}(\Theta^3)$, $\cos\Theta = 1 + \mathcal{O}(\Theta^2)$

$\tan\Theta = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta} = \Theta + \mathcal{O}(\Theta^3)$

Newtonsche Bewegungsgleichung für MP i

$$m\ddot{y}_i = -\frac{T}{\Delta L}(y_i - y_{i-1}) - \frac{T}{\Delta L}(y_i - y_{i+1}) = -\frac{T}{\Delta L}(2y_i - y_{i-1} - y_{i+1})$$

Kontinuumslimes $N \to \infty$

$$\boxed{\ddot{y}_i = -\frac{T}{m\Delta L}(2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}) \quad (X)} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots N \; (X)$$

$y_i = y_i(t) = y(x_i, t)$

$y_i = y(x_i, t)$ momentane, transversale Auslenkung zur Zeit t am Ort x_i (= Ort der MP's i)

→ $y(x,t)$; Die DGL für $y(x,t)$ heißt Wellengleichung.

Herleitung: $y = y(x,t)$; partielle Ableitungen $\dot y = \frac{\partial y}{\partial t}$, $\ddot y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ bei festem x

Taylor:

$$y_{i-1} = y(x_{i-1},t) = \underbrace{y(x_i,t)}_{y_i} + (-\Delta L)\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x_i} + \frac{1}{2}(\Delta L)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + O((\Delta L)^3)$$

$$y_{i+1} = y(x_{i+1},t) = \underbrace{y(x_i,t)}_{y_i} + (\Delta L)\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x_i} + \frac{1}{2}(\Delta L)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + O((\Delta L)^3)$$

in (X): $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = +\frac{T}{m\Delta L}(\Delta L)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Taylor $f(x_{i-1}) = f(x_i) + \underbrace{(x_{i-1} - x_i)}_{-\Delta L} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_i} + \dots$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \underbrace{\frac{T\Delta L}{m}}_{= \text{const} = v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

v: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Saite habe Länge L und Masse M; homogene Massenbelegung $\rho = \frac{M}{L} = \text{const} = \frac{m}{\Delta L}$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ Materialgrößen

Wellengleichung $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$ (XX)

homogene, lineare, partielle DGL, 2. Ordnung in $y(x,t)$.

Randbedingungen (Saite)

$y(x=0, t) = y(x=L, t) = 0 \quad \forall t$

Anfangsbedingungen $y(x, t=0) = y_0(x)$

$\dot y(x, t=0) = \dot y_0(x)$

Ansatz zur Lösung von (XX) für Saite "stehende Wellen"

$y(x,t) = A(x)\cdot B(t)$ Produktansatz

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A(x)\,\ddot B$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = B(t)\,A''$

in (XX) $A\cdot\ddot B - v^2 B\cdot A'' = 0 \;\Big|\; \frac{1}{A\cdot B}$ $\Big\}$ $\underbrace{\frac{\ddot B}{B}}_{\text{Zeit}} - v^2 \underbrace{\frac{A''}{A}}_{\text{Ort}} = 0$