

## 4 Schwingungen – experimentelle Aspekte

Schwingungen sind ein vielfältiges Phänomen in der Natur. Viele physikalische Größen (Position, Luftdruck, elektrische Spannung ...) haben Gleichgewichtswerte, um die sie variieren. Die rücktreibenden Effekte sind in erster Näherung oft linear, d.h. eine harmonische Schwingung ist i.d.R. eine gute Modellbeschreibung.

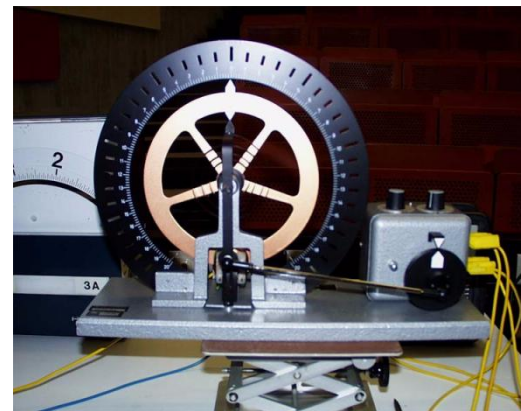
**Experiment** zur gedämpften harmonischen Schwingung: **Pohlsches Rad**, ein Drehpendel mit Spiralfeder, Winkelstrombremse und elektrischem Antrieb, der das feste Ende der Spiralfeder periodisch bewegt.

- (nahezu) ungedämpfte Schwingung: Pendel schwingt mit seiner Eigenfrequenz
- gedämpfte Schwingung: bei schwacher Dämpfung mit leicht reduzierter Eigenfrequenz, bei starker Dämpfung ist die Bewegung nicht mehr periodisch (aperiodischer Grenzfall, Kriechfall)
- erzwungene ungedämpfte und gedämpfte Schwingung: Pendel schwingt mit der Erregerfrequenz
  - ... Frequenz weit unterhalb der Eigenfrequenz: kleine Amplitude, Pendel folgt Erreger mit geringer Verzögerung (Phasenverschiebung  $\approx 0$ )
  - ... Frequenz gleich Eigenfrequenz: Resonanz, große Amplitude, Pendel folgt mit  $1/4$  Periode Verzögerung (Phasenverschiebung  $\pi/2$ ), je kleiner die Dämpfung, desto größer die Resonanzamplitude (Extremfall "Resonanzkatastrophe")
  - ... Frequenz weit oberhalb der Eigenfrequenz: Amplitude geht gegen null, Phasenverschiebung gegen  $\pi$

**Erzwungene Schwingung** (zur Erinnerung)

$$m \cdot \ddot{y}(t) + \lambda \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = F_e(t) \quad F_e(t) = F_0 \cdot e^{i\omega_e t}$$

$$y(t) = C \cdot e^{i\omega_e t} \quad C = \frac{F_0}{m} \cdot A \quad [C] = \text{m} \quad [A] = \text{s}^2$$



Pohlsches Rad (nach Robert W. Pohl, 1884-1976, s. Lehrbücher "Einführung in die Physik")

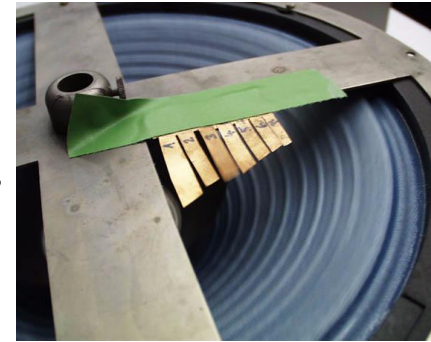
**Experiment** zur erzwungenen Schwingung: **Zungenfrequenzmesser.**

Metallische Blattfedern ("Zungen") verschiedener Länge und Eigenfrequenz sind über einem Lautsprecher angebracht, der einen Sinuston emittiert.

Wenn die Frequenz des Tons mit der Eigenfrequenz einer Zunge übereinstimmt, beginnt sie deutlich sichtbar zu schwingen.

Auch die Auslenkung einer Blattfeder ist proportional zur rücktreibenden Kraft und hängt von Länge  $L$ , Breite  $b$ , Dicke  $d$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  ab:

$$z = -4 \frac{L^3}{E \cdot b \cdot d^3} F \quad (\text{Details später im Kapitel über deformierbare feste Körper})$$



**Beispiel für Resonanz:** Zwei **Stimmgabeln** mit Resonanzkörper: Sind die Frequenzen ungefähr gleich, wird eine Stimmgabel durch den Ton der anderen in Schwingung versetzt. Die Frequenz wird durch Gewichte verändert, die an den Zinken angeschraubt werden.

Was bedeutet "ungefähr"? Die **Breite der Resonanzkurve** hängt von der Dämpfung ab. Übliche Definition der Breite: Frequenzabstand zwischen Punkten der halben Resonanzamplitude

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_e^2}} \quad \rightarrow \quad |A|_{\max} = \frac{1}{2\gamma} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

$$|A| = \frac{|A|_{\max}}{2} \quad \rightarrow \quad (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_e^2 = 16\gamma^2 (\omega_0^2 - \gamma^2) \quad \text{quadratische Gleichung für } \omega^2$$

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_R^2 \pm 2\gamma \sqrt{3\omega_R^2 + 3\gamma^2} \quad \omega_{1,2}^2 - \omega_R^2 = \pm 2\gamma \sqrt{3\omega_R^2 + 3\gamma^2} = (\omega_{1,2} - \omega_R)(\omega_{1,2} + \omega_R) \approx \pm \frac{\Delta\omega}{2} 2\omega_R$$

$$\Delta\omega \approx 2 \frac{\gamma}{\omega_R} \sqrt{3\omega_R^2 + 3\gamma^2} \approx 2\gamma\sqrt{3}$$

## Güte eines Resonators:

Gütefaktor: allgemeine Definition  $Q = 2\pi \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{Energieverlust/Periode}} = 2\pi \frac{W}{V}$

Gespeicherte Energie bei mechanischer Schwingung = max. kinetische Energie

$$W = \frac{1}{2} m \cdot \dot{y}_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 C_0^2 \cdot e^{-2\gamma t} \quad \text{weil} \quad y = C_0 e^{-\gamma t} e^{i\omega t} \quad \gamma \ll \omega$$

$$\dot{W} = -\gamma \cdot m \cdot \omega^2 C_0^2 \cdot e^{-2\gamma t} \quad V = |\dot{W}| \cdot T = |\dot{W}| \cdot 2\pi / \omega$$

$$Q = 2\pi \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{2\gamma} = \omega \frac{1}{2\gamma} = \omega \frac{m}{\lambda} \quad \text{kleine Dämpfung bzw. Verluste} = \text{schmale Resonanz} = \text{hohe Güte}$$

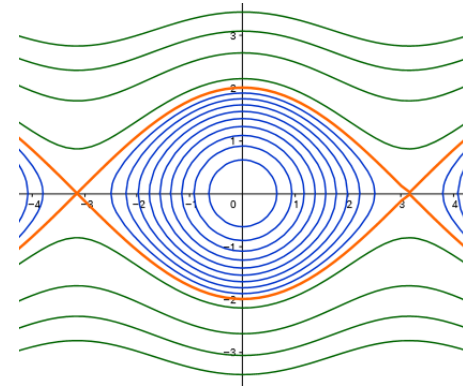
**Beispiel für eine Resonanzkatastrophe:** Einsturz der Tacoma-Narrows-Brücke 1940 im US-Bundesstaat Washington. Die Erregung war allerdings nicht schmalbandig (also keine bestimmte Frequenz), sondern starker Wind war die Energiezufuhr für eine selbsterregte Schwingung (vgl. Blasinstrument).



## Pendelbewegung im Phasenraum

Im Phasenraum wird der Zustand eines Systems beschrieben, z.B. in der Mechanik verallgemeinerte Ortskoordinale (kann auch ein Winkel sein) und verallgemeinerte Impulskoordinate (Geschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit etc.) zu jedem Zeitpunkt.

Pendel: Bei kleinen Auslenkungen (hier:  $q$ ) elliptische Bahn. Bei größeren Auslenkungen wird die Frequenz kleiner. Die sog. Separatrix (rot) ist die Grenze zwischen gebundenen Bahnen (blau) und ungebundenen Bahnen (Überschläge des Pendels, grün).

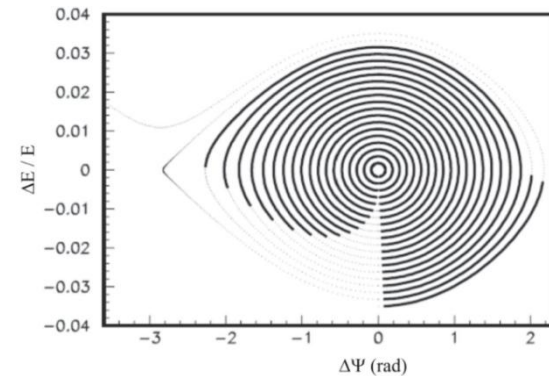
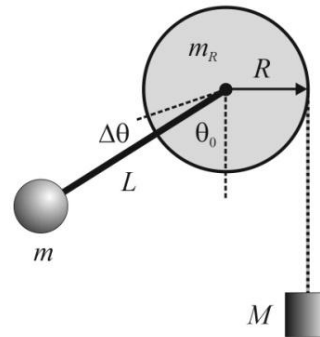


## Besondere Pendel

### (i) Pendel mit zusätzlichem Drehmoment

(vgl. Übungsblatt 10)

Das mechanische Modell entspricht genau der longitudinalen Oszillation von Elektronen in einem Speicherring, z.B. bei DELTA mit einer Frequenz von 16 kHz bzw. Periodendauer 62  $\mu\text{s}$  (160 Umläufe).

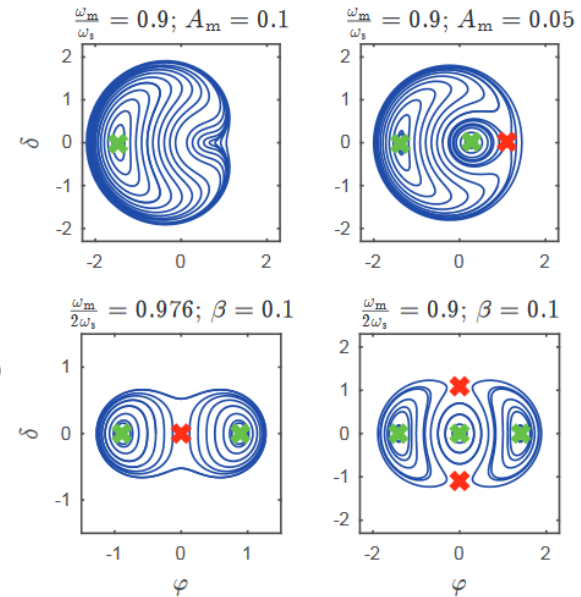


Die Form der Separatrix ist bezüglich der Ortskoordinate asymmetrisch, was im mechanischen Modell am einseitigen Drehmoment und bei der Elektronenbewegung im Speicherring am Energieverlust durch Synchrotronstrahlung liegt, der durch ein periodisches elektrisches Feld (Radiowelle in einem Hohlraumresonator) ausgeglichen wird.

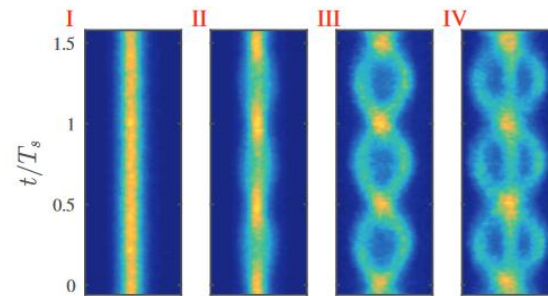
(ii) Ein parametrisches Pendel verändert seine Amplitude und Frequenz als Funktion der Zeit, z.B. durch Variation der Pendellänge. Bewegungsgleichung:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2(t) \cdot y(t) = 0$$

Beispiel: Variation der Hochfrequenzphase in einem Speicherring mit der ungefähr der doppelten Schwingungsfrequenz. Je nach Frequenz und Amplitude der Variation entstehen im Phasenraum stabile "Inseln", die mit der Schwingungsfrequenz rotieren. Im realen Raum beobachtet man (z.B. mit einer sog. Streak-Kamera) mehrere longitudinal oszillierende Teilchenpakete.



M. Jebrancik, Masterarbeit 2016, TU Dortmund



## Experimente mit gekoppelten Pendeln

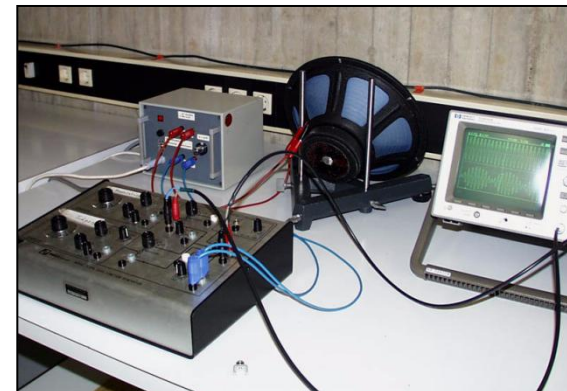
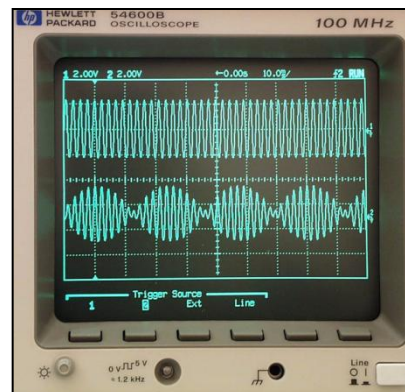
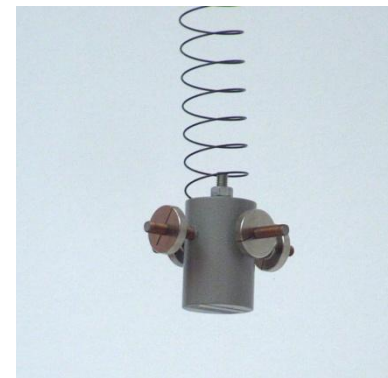
(i) **Zwei Fadenpendel:** zwei Eigenmoden, gleichphasig und gegenphasig (Phasendifferenz  $0$  und  $\pi$ ). Diese Moden zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich der Bewegungszustand jedes Pendels im Lauf der Zeit nicht ändert. Alle anderen Bewegungen sind Kombinationen aus diesen Eigenmoden und für jedes Pendel ändert sich die Schwingungsamplitude periodisch (Schwebung).

(ii) **Wilberforce-Pendel:** Kombination von linearer Schwingung und Torsionsschwingung an einer Feder. Ähnliche Frequenz beider Schwingungen führt zu einer Schwebung

$$T_z = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad T_\theta = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad \frac{m}{k} \approx \frac{I}{D}$$

$m$ : Masse;  $k$ : Federkonstante;  $I$ : Trägheitsmoment;  $D$ : Torsionsmodul  
(Anpassung des Trägheitsmoments durch radial verstellbare Gewichte)

(iii) **Akustische Wellen** mit leicht unterschiedlicher Frequenz führen zu einer hörbaren Schwebung (gleichzeitig Beobachtung mit den Oszillografen).



## Experimentes Beispiel für $N$ gekoppelte Punktmassen

### Elektronenpakete in einem Speicherring – Strahlinstabilitäten

Jedes Elektronenpaket ist ein schwingungsfähiges Objekt mit longitudinalen und transversalen Schwingungen um die Sollposition (Wechselwirkung mit Hochfrequenzresonator bzw. Magneten). Die Kopplung kommt durch sog. "Wake-Felder" zustande (*wake* (engl.) = Kielwasser, Heckwelle), nachgeschleppte elektromagnetische Felder aufgrund von geometrischen Unregelmäßigkeiten oder des elektrischen Widerstands der Vakuumkammer), z.B. bei DELTA maximal  $N = 192$  (Umfang / Hohlwellenlänge = 115,2 m / 0,60 m = 192).

$N = 192$  Eigenmoden, Phasendifferenz  $\Delta\varphi = 2\pi \cdot \mu/N$  mit Modenindex  $\mu$  von 0 bis 191.

(vgl. zwei gekoppelte Fadenpendel: 2 Eigenmoden,  $\Delta\varphi = 2\pi \cdot \mu/N$  mit Modenindex  $\mu$  von 0 bis 1.)

Unten: Messung der longitudinale Abweichung aller 192 Elektronenpakete (*bunches*) bei jedem Umlauf. Die sog. Fourier-Transformation bestimmt die Frequenzen, die in einem zeitlichen Signal enthalten sind. Für einen ortsfesten Detektor erscheinen die verschiedenen Moden bei verschiedener Frequenz, z.B.

Mode  $\mu = 0$  (alle Pakete gleichphasig)  $\rightarrow$  kleine Frequenz

Mode  $\mu = N/2$  (benachbarte Pakete gegenphasig)  $\rightarrow$  hohe Frequenz

Man sieht in diesem Beispiel, dass nur bestimmte Moden (rechts) an der Instabilität des Strahls teilhaben.

